Initiation au calcul stochastique (pour la finance)

Bruno Bouchard
Université Paris-Dauphine, Ceremade,
et Ensae, Crest.

Cette version : 9 janvier 2015

Table des matières

Chapitre 1

Exemple de processus en temps discret et espace d'état fini : le modèle d'arbre

On étudie dans cette partie le processus de prix des actifs financiers tels que modéliser par Cox, Ross et Rubinstein (modèle CRR ou modèle binomial). Cela va nous permettre d'introduire certaines notions de base du calcul stochastique tout en étudiant les principes fondamentaux de la valorisation et de la couverture de produits dérivés.

On n'utilise dans ce chapitre que des outils relativement élémentaires.

1 Le modèle binomial à une période

1.1 Modélisation : Processus aléatoire et information

On se place dans un modèle dans lequel le prix de l'action S est donné aux dates $t = 0$ et $t = 1$ par S_0 et S_1 respectivement. La valeur $S_0 > 0$ est connue à la date 0 mais S_1 est une variable aléatoire qui peut prendre deux valeurs possibles.
Afin de modéliser l'aléa sur S_1, on se donne l'espace de probabilité $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$ et on introduit la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω définie par $\mathbb{P}[\omega_1] = 1-\mathbb{P}[\omega_2] = p$ où $p \in]0, 1[$. On définit ensuite $S_1(\omega_1) = \mathrm{u}S_0$ et $S_1(\omega_2) = \mathrm{d}S_0$ où $0 < \mathrm{d} < \mathrm{u}$ sont deux nombres réels.

Terminologie 1.1 (Processus stochastique) *Un processus stochastique est une suite de variable aléatoires indexées par le temps.* $S := (S_t)_{t=0,1}$ *est un processus stochastique.*

Excercice 1.2 *1. Montrer que* $\mathbb{P}[S_1 = \mathrm{u}S_0] = 1 - \mathbb{P}[S_1 = \mathrm{d}S_0] = p$, *i.e.* S_1 *est une variable aléatoire prenant les valeurs* $\mathrm{u}S_0$ *et* $\mathrm{d}S_0$ *avec probabilité* p *et* $1-p$ *respectivement.*
2. Ré-écrire S_1 *en fonction d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.*
3. Calculer l'espérance et la variance de S_1.

L'argent non investi dans l'action S est placé au taux d'intérêt r (si ce montant est négatif, il s'agit en fait d'un emprunt) : 1 € placé en $t = 0$ rapport $1 + r$ € en $t = 1$.

Le trader connaît les paramètres du modèle (r, u, d, S_0) mais ne connait S_1 qu'à la date 1.

Terminologie 1.3 (Filtration/tribu) a. *On note* $\mathcal{F}_0 = \sigma(S_0)$ *et* $\mathcal{F}_1 = \sigma(S_1)$. *L'ensemble* $\mathcal{F}_t$ *donne la connaissance qu'à le trader de l'aléa à la date* t. *En* $t = 0$, *il ne sait rien sur l'aléa, il ne connait que* S_0. *En* $t = 1$, *il connait la valeur prise par* S_1 *et donc tout ce qui est connu lorsque* S_1 *l'est.*
b. *On dit que* $\mathbb{F} := (\mathcal{F}_t)_{t=0,1}$ *est une filtration, i.e. une famille croissante en temps d'information (de tribus). Ici c'est la filtration engendrée par le processus* S.
c. *Le* σ *dans la notation fait référence au concept mathématique de tribu : un ensemble non vide de parties de* Ω *stable par passage au complémentaire et union dénombrable. Plus précisément,* $\sigma(S_0) = \{\emptyset, \Omega\}$ *ce qui signifie que l'on ne peut dissocier que ce qui est toujours vrai* (Ω) *de ce qui ne l'est jamais* $(\emptyset)$, *et* $\sigma(S_1) = \{\emptyset, \Omega, \omega_1, \omega_2\}$ *ce qui signifie que l'on peut en plus dissocier ce qui est vrai si* $\omega = \omega_1$ *de ce qui est vrai si* $\omega = \omega_2$, *i.e. on sait si la valeur de l'aléa réalisée est* ω_1 *ou* ω_2.

Terminologie 1.4 (Processus adapté) *Un processus stochastique est adapté à une filtration si l'information contenue dans la filtration en* t *est suffisante pour connaitre la valeur du processus à cette date. Par construction,* S *est adapté à* $\mathbb{F}$ *: on connait* $S_1(\omega)$ *selon que* ω *vaut* ω_1 *ou* ω_2.

Il reste maintenant à définir la notion de stratégie financière. Dans ce modèle simple on ne peut que vendre/acheter l'action à la date 0 et déboucler sa position en 1. Si $\phi_0 \in \mathbb{R}$ désigne le nombre de titres achetés (c'est en faite une vente si $\phi_0 < 0$) et x est la valeur du portefeuille du trader en 0, alors la valeur de son portefeuille en 1 est donnée par

$$V_1^{x,\phi} := x + \phi_0(S_1 - S_0) + r(x - \phi_0 S_0). \tag{1.1}$$

Le premier terme est le gain réalisé sur l'action, le second est le gain réalisé par le placement de la partie du portefeuille non-investie en action.

Excercice 1.5 *Calculer la loi de la variable aléatoire* $V_1^{x,\phi}$*. Montrer que le processus* $V^{x,\phi} = (V_t^{x,\phi})_{t=0,1}$ *est adapté à* $\mathbb{F}$*.*

1.2 Couverture d'option : notion de martingale et mesure risque neutre

On veut couvrir une option européenne de payoff G, une variable aléatoire connue en 1, i.e. G est une fonction qui ne dépend que de $\omega \in \Omega$.

Exemple 1.6 *Dans le cas d'un call de strike* K*, on a* $G(\omega) = [S_1(\omega) - K]^+$*, où* $y^+ := \max\{0, y\}$*.*

On cherche le capital initial minimum x qu'il faut en 0 pour obtenir en 1 un portefeuille de couverture de valeur au moins égale à G, quelle que soit la réalisation de l'aléa.

Terminologie 1.7 ($\mathbb{P} -$ p.s.) *On dit que quelque chose est vrai* $\mathbb{P} -$ p.s. *(*$\mathbb{P}$*-presque sûrement), si c'est vrai avec probabilité* 1 *pour* $\mathbb{P}$*.*

Dans ce modèle simple, on peut en fait s'arranger pour que $V_1^{x,\phi} = G$ $\mathbb{P} -$ p.s. Comme $\mathbb{P}[\omega_i] > 0$ pour $i = 1, 2$, ceci revient à dire que

$$\begin{aligned} x + \phi_0(S_1(\omega_1) - S_0) + r(x - \phi_0 S_0) &= G(\omega_1) \\ x + \phi_0(S_1(\omega_2) - S_0) + r(x - \phi_0 S_0) &= G(\omega_2). \end{aligned}$$

Si on suppose que $\mathrm{d} < 1 + r < \mathrm{u}$, la résolution du système donne

$$x = \frac{qG(\omega_1) + (1-q)G(\omega_2)}{1+r} \quad \text{et} \quad \phi_0 = \frac{G(\omega_1) - G(\omega_2)}{S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2)} \tag{1.2}$$

où

$$q := \frac{(1+r)S_0 - S_1(\omega_2)}{S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2)} = \frac{1+r-\mathrm{d}}{\mathrm{u}-\mathrm{d}}. \tag{1.3}$$

Excercice 1.8 (Absence d'arbitrage) *On rappelle que* $\mathrm{d} < \mathrm{u}$ *par hypothèse.*

1. *Montrer que si la condition* $\mathrm{d} < 1+r < \mathrm{u}$ *n'est pas vérifiée alors on peut réaliser un arbitrage, i.e. trouver une stratégie* ϕ_0 *telle que*

$$V_1^{0,\phi} \geq 0 \ \mathbb{P}-\text{p.s.} \quad \textit{et} \quad \mathbb{P}[V_1^{0,\phi} > 0] > 0.$$

2. *Donner une interprétation économique à la notion d'arbitrage ci-dessus.*
3. *Montrer que cela revient à dire que* $V_1^{0,\phi}(\omega) \geq 0$ *pour tout* $\omega \in \Omega$ *et* $V_1^{0,\phi}(\omega) > 0$ *pour au moins un* $\omega \in \Omega$.
4. *Montrer que l'absence d'arbitrage est en fait équivalente à la condition* $\mathrm{d} < 1+r < \mathrm{u}$.

On suppose pour le reste de cette section que $\mathrm{d} < 1+r < \mathrm{u}$. On a alors $q \in]0,1[$, et cette quantité peut donc être interprétée comme un poids associé à une mesure de probabilité. Plus précisément, on définit la mesure $\mathbb{Q}$ par

$$\mathbb{Q}[\omega_1] = 1 - \mathbb{Q}[\omega_2] = q.$$

On peut ré-écrire la partie de gauche de (1.2) sous la forme

$$x = \frac{\mathbb{Q}[\omega_1]G(\omega_1) + \mathbb{Q}[\omega_2]G(\omega_2)}{1+r} = \beta_1 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G]$$

où $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ est l'espérance quand on applique les poids associés à $\mathbb{Q}$ et

$$\beta_1 := (1+r)^{-1}$$

est le facteur d'escompte (d'actualisation) associé à r sur la période $[0,1]$.

Conclusion 1.9 *On a*

$$V_1^{x,\phi} = G \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

si et seulement si

$$\phi_0 = \frac{G(\omega_1) - G(\omega_2)}{S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2)} \quad \textit{et} \quad x = \beta_1 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G]$$

Terminologie 1.10 (Marché complet/prix viable) *Quel que soit le payoff G, on peut trouver x et ϕ tels quel $V_1^{x,\phi} = G \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$, i.e. n'importe quel payoff peut être répliqué parfaitement. On dit que le marché est complet (par opposition aux marchés dits incomplets).*
b. *Sur une marché sans arbitrage et compétitif, le seul prix possible est $p(G)$. Si le vendeur vend à un prix plus élevé, il gagne de l'argent. Il en est de même pour l'acheteur si le prix est plus faible. On dit que c'est le seul prix viable.*

Remarque 1.11 *La valeur de p n'intervient aucunement dans le résultat ci-dessous. Tout ce qui compte est de savoir que $0 < p < 1$, i.e. les deux cas d'évolution de S sont possibles.*

Terminologie 1.12 (Martingale/mesure risque neutre) a. *On dit qu'un processus adapté est une martingale par rapport à $\mathbb{Q}$ si l'espérance conditionnelle de sa valeur demain sachant l'information d'aujourd'hui est égale à sa valeur d'aujourd'hui.*
b. *On peut remarquer que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_1 S_1|\mathcal{F}_0] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_1 S_1] = S_0 = \beta_0 S_0$ avec la convention $\beta_0 = 1$. Ceci signifie que le processus de prix actualisé, βS, est une martingale sous $\mathbb{Q}$.*
c. *La mesure $\mathbb{Q}$ est la seule pour laquelle βS est une martingale. On l'appelle mesure risque neutre ou mesure martingale. Le terme martingale est clair. Le terme risque neutre vient du fait qu'en calculant le prix comme l'espérance du payoff sous cette mesure le trader peut se couvrir parfaitement sans prendre de risque.*

Remarque 1.13 (Mesure équivalente) *La mesure $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ au sens où les poids q et $1-q$ sont strictement positifs. Autrement dit, tout ce qui est possible pour $\mathbb{P}$ est possible pour $\mathbb{Q}$ et vice-et-versa.*

Remarque 1.14 (Changement de mesure) *On peut passer d'une espérance sous $\mathbb{P}$ à une espérance sous $\mathbb{Q}$ et multipliant les variables aléatoires par la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ définie par*

$$\omega \mapsto H(\omega) = \mathbb{Q}[\omega]/\mathbb{P}[\omega].$$

En effet,

$$\mathbb{E}[H\zeta] = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{P}[\omega_i] H(\omega_i)\zeta(\omega_i) = \sum_{i=1}^{2} \mathbb{Q}[\omega_i]\zeta(\omega_i) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\zeta].$$

2 Le modèle binomial à T périodes

On considère maintenant l'extension du modèle précédent à $T \in \mathbb{N}$ périodes, $T \geq 2$.

2.1 Modélisation et mesure martingale

Le processus de prix de l'action est $S = (S_t)_{t \leq T}$ où S_t désigne la valeur de l'action en t. A chaque période $[t, t+1]$, le cours est multiplié par u ou par d. On suppose dans toute cette section que $0 < \mathrm{d} < 1 + r < \mathrm{u}$ et que $S_0 > 0$.

L'espace de probabilité est l'ensemble des suites de montés et descentes possibles : $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_T) \in \{\mathrm{u}, \mathrm{d}\}^T\}$, i.e. la composant ω_t du vecteur ω de $\mathbb{R}^T$ vaut u ou d selon que le prix est multiplié par u ou par d. On définit alors

$$S_t(\omega) = S_0 \prod_{s=1,\ldots,t} \omega_s.$$

Excercice 2.1 *Montrer que* $S_{t+1}(\omega) = S_t(\omega)\omega_{t+1}$.

A chaque instant t, on suppose que la probabilité des deux évolutions possibles est strictement positive et ne dépend pas de t :

$$p := \mathbb{P}[S_{t+1} = \mathrm{u}S_t | \mathcal{F}_t] = 1 - \mathbb{P}[S_{t+1} = \mathrm{d}S_t | \mathcal{F}_t] \in]0, 1[$$

où $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}$ est la filtration engendrée par S, i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(S_1, S_2, \ldots, S_t)$ est l'information correspondant à la connaissance de la trajectoire de S jusqu'en t.

Remarque 2.2 *Une variable aléatoire ζ dont la valeur est connue en t ne dépend que de $(S_1, S_2, \ldots, S_t)$. Elle ne dépend donc de la réalisation ω de l'aléa qu'à travers $\omega^t := (\omega_1, \ldots, \omega_t)$. On écrira donc indifféremment $\zeta(\omega)$ ou $\zeta(\omega^t)$.*

Excercice 2.3 *1. En utilisant que*

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{E}[\mathbb{P}[A|\mathcal{F}_t]]$$

pour tout évènement A et tout $t \leq T$, montrer que

$$\mathbb{P}[\omega] = p^{\#\omega}(1-p)^{T-\#\omega}$$

où $\#\omega := \sum_{t=1}^{T} \mathbf{1}_{\omega_t = \mathrm{u}}$.

2. Donner une interprétation en terme de loi binomiale.

3. En déduire que[1]

$$\mathbb{P}[S_T = \mathrm{u}^n \mathrm{d}^{T-n} S_0] = \frac{T!}{n!(T-n)!} p^n (1-p)^{T-n}$$

pour tout $0 \leq n \leq T$.

Une stratégie financière est un processus adapté ϕ, i.e. ϕ_t est connu en t et en particulier ne peut dépendre de ω qu'à travers $\omega^t = (\omega_1, \ldots, \omega_t)$. Chaque $\phi_t(\omega)$ (ou $\phi_t(\omega^t)$) correspond au nombre d'actions en portefeuille sur la période $[t, t+1]$ si ω^t se réalise. On ne sait donc pas en 0 combien ϕ_t vaudra en $t > 0$, mais sa valeur ne dépendra que de la trajectoire de S jusqu'en t, autrement dit on se décidera en t en fonction de ce qu'il s'est passé auparavant.

On note $V^{x,\phi}$ le processus de portefeuille valant x en 0 et suivant la stratégie ϕ. Le taux d'intérêt sur chaque période est constant et égale à $r \geq 0$. La dynamique de $V^{x,\phi}$ est donc

$$V_{t+1}^{x,\phi} = V_t^{x,\phi} + \phi_t(S_{t+1} - S_t) + r(V_t^{x,\phi} - \phi_t S_t) \tag{2.4}$$

(comparer avec (1.1)). Si on note

$$\beta_t = (1+r)^{-t},$$

ceci se ré-écrit sous la forme

$$\beta_{t+1} V_{t+1}^{x,\phi} = \beta_t V_t^{x,\phi} + \phi_t(\beta_{t+1} S_{t+1} - \beta_t S_t)$$

où encore

$$\tilde{V}_{t+1}^{x,\phi} = \tilde{V}_t^{x,\phi} + \phi_t(\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t)$$

avec $\tilde{V} := \beta V$ et $\tilde{S} := \beta S$, les processus de portefeuille et de prix actualisés. On obtient donc

$$\tilde{V}_t^{x,\phi} = x + \sum_{s=0}^{t-1} \phi_s(\tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s). \tag{2.5}$$

Terminologie 2.4 (Intégrale stochastique) *On appelle*

$$\int_0^t \phi_s d\tilde{S}_s := \sum_{s=0}^{t-1} \phi_s(\tilde{S}_{s+1} - \tilde{S}_s)$$

1. Pour un entier $k \geq 0$, on note $k! := k(k-1)(k-2)\cdots 1$ si $k \geq 1$ et $k! = 1$ si $k = 0$.

l'intégrale stochastique de ϕ par rapport à $\tilde{S}$ sur l'intervalle $[0,t]$. En temps discret, l'intégrale stochastique est une simple somme de ϕ multiplié par les accroissements de $\tilde{S}$.

Terminologie 2.5 (Martingale/mesure risque neutre) *Soit $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité sur Ω définie par*

$$\mathbb{Q}[S_{t+1} = \mathrm{u}S_t|\mathcal{F}_t] = 1 - \mathbb{Q}[S_{t+1} = \mathrm{d}S_t|\mathcal{F}_t] = q$$

où q est défini comme dans (1.3). Alors

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = (q\mathrm{u}\beta_t S_t + (1-q)\mathrm{d}\beta_t S_t)/(1+r) = \beta_t S_t.$$

Le processus $\tilde{S}$ est donc une martingale sous $\mathbb{Q}$. C'est la seule mesure qui rend $\tilde{S}$ martingale. On l'appelle mesure martingale ou mesure risque neutre.

Excercice 2.6 *Soit X une martingale sous $\mathbb{Q}$, i.e. tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = X_t$ pour tout $t < T$. Montrer que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ pour tout $s \le t \le T$ (on utilisera le fait que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot|\mathcal{F}_s]$ pour $s \le t$).*

Remarque 2.7 *Comme ϕ_t et $\tilde{V}_t^{x,\phi}$ sont connus en t, on en déduit que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_{t+1}^{x,\phi}|\mathcal{F}_t] = \tilde{V}_t^{x,\phi} + \phi_t\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_{t+1} - \tilde{S}_t|\mathcal{F}_t] = \tilde{V}_t^{x,\phi},$$

i.e. $\tilde{V}^{x,\phi}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ également. Plus généralement, un processus défini par une intégrale stochastique par rapport est une martingale est une martingale.

Excercice 2.8 (Absence d'arbitrage) *En utilisant l'Exercice 2.6, montrer que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{x,\phi}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{x,\phi}|\mathcal{F}_0] = x.$$

Montrer que si $X \ge 0$ $\mathbb{P} - \mathrm{p.s.}$ et $X(\omega) > 0$ pour au moins un $\omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] > 0$. En déduire que l'on ne peut pas trouver une stratégie ϕ telle que

$$V_T^{0,\phi} \ge 0 \ \ \mathbb{P} - \mathrm{p.s.} \ \ \textit{et} \ \ \mathbb{P}[V_T^{0,\phi} > 0] > 0.$$

Conclusion 2.9 *Il existe une unique mesure de probabilité qui rend le processus de prix actualisé $\tilde{S}$ martingale. Cette mesure rend également les processus de portefeuille actualisés martingale.*

Excercice 2.10 *Montrer que si ξ est une variable aléatoire et X est défini par $X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi|\mathcal{F}_t]$, alors X est une $\mathbb{Q}$-martingale. Montrer que si X est défini par $X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T \xi|\mathcal{F}_t]/\beta_t$ alors βX est une $\mathbb{Q}$-martingale.*

2.2 Couverture d'options européennes

Comme dans le modèle à une période, on veut maintenant couvrir une option européenne de payoff G, une variable aléatoire connue en T. D'après l'exercice précédent, il est clair que

$$V_T^{x,\phi} = G \; \mathbb{P} - \text{p.s.} \;\Rightarrow\; \tilde{V}_T^{x,\phi} = \beta_T G \; \mathbb{P} - \text{p.s.} \;\Rightarrow\; x = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G] =: p(G).$$

Autrement dit, on ne peut répliquer le payoff G qu'en partant d'une richesse initiale $p(G)$ comme définie ci-dessus. On montre maintenant que la réciproque est vraie : on peut répliquer le payoff G en partant de $p(G)$. Ceci se fait en suivant la stratégie ϕ définie par l'algorithme rétrograde suivant :

$$\begin{aligned} Y_t(\omega^t) &:= (qY_{t+1}(\omega^t, \mathrm{u}) + (1-q)Y_{t+1}(\omega^t, \mathrm{d}))/(1+r) \\ \phi_t(\omega^t) &:= (Y_{t+1}(\omega^t, \mathrm{u}) - Y_{t+1}(\omega^t, \mathrm{d}))/(S_{t+1}(\omega^t, \mathrm{u}) - S_{t+1}(\omega^t, \mathrm{d})) \end{aligned} \tag{2.6}$$

que l'on initialise avec

$$Y_T := G. \tag{2.7}$$

Dans (2.6), $Y_{t+1}(\omega^t, \mathrm{u})$ est $Y_{t+1}(\bar{\omega}^{t+1})$ avec $\bar{\omega}^{t+1} = (\omega_1, \ldots, \omega_t, \mathrm{u})$, et $Y_{t+1}(\omega^t, \mathrm{d})$ est défini de manière similaire avec d à la place de u.

Excercice 2.11 *Montrer que la stratégie ϕ définie ci-dessus vérifie*

$$V_t^{x,\phi} = Y_t, \; t \leq T,$$

avec $x = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$. Montrer également que $Y_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G|\mathcal{F}_t]/\beta_t$ pour tout $t \leq T$.

Conclusion 2.12 *Etant donnée une option européenne de payoff G, le seul prix viable est donné par $E^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$. Il existe une stratégie de réplication du payoff qui peut être calculée par l'algorithme rétrograde* (2.6)-(2.7)*.*

Excercice 2.13 (Option européenne vanille) *Soit une option de payoff $G = g(S_T)$ où g est une fonction réelle. Montrer que*

$$p(G) = \beta_T \sum_{n=0}^{T} \frac{T!}{n!(T-n)!} q^n (1-q)^{T-n} g(S_0 \mathrm{u}^n \mathrm{d}^{T-n}).$$

Excercice 2.14 (Evaluation d'un call) 1. *En utilisant excel, calculer le prix d'une option de vente de strike* 100 *pour les maturités* $T = 1, 2, 10, 20, 30, 40, 50$ *dans le modèle de paramètres :* $S_0 = 100$, $1 + r = e^{0.05/T}$, $\mathrm{u} = e^{0.2/\sqrt{T}}$, $\mathrm{d} = e^{-0.2/\sqrt{T}}$. *Calculer également le nombre de titres à détenir en portefeuille à la date* 0 *pour se couvrir.*
2. *Est-ce que les résultats obtenus semblent converger quand* T *devient grand ?*
3. *Tirer sur excel* 500 *réalisations indépendantes* $(Y_i)_{i\leq 500}$ *d'une loi normale de moyenne* $0.05 - 0.2^2/2$ *et de variance* 0.2^2. *Calculer ensuite* $500^{-1}\sum_{i=1}^{500}[100 - 100e^{Y_i}]^+$. *Comparer avec les résultats de la question précédente. Vers quoi doit-on tendre si le nombre de tirages indépendants tend vers l'infini ?*

Excercice 2.15 (Evaluation d'une option à barrière) 1. *En utilisant excel, calculer le prix d'une option de vente de strike* 100 *à barrière up-and-out de niveau* 105 *pour les maturités* $T = 1, 2, 10, 20, 30, 40, 50$ *dans le modèle de paramètres :* $S_0 = 100$, $1 + r = e^{0.05/T}$, $\mathrm{u} = e^{0.2/\sqrt{T}}$, $\mathrm{d} = e^{-0.2/\sqrt{T}}$. *Calculer également le nombre de titres à détenir en portefeuille à la date* 0 *pour se couvrir.*
2. *Est-ce que les résultats obtenus semblent converger quand* T *devient grand ?*

Excercice 2.16 (Evaluation d'une option asiatique) 1. *En utilisant excel, calculer le prix d'une option de payoff* $[100 - T^{-1}\sum_{t=1}^{T} S_t]^+$ *pour les maturités* $T = 1, 2, 10, 20, 30, 40, 50$ *dans le modèle de paramètres :* $S_0 = 100$, $1 + r = e^{0.05/T}$, $\mathrm{u} = e^{0.2/\sqrt{T}}$, $\mathrm{d} = e^{-0.2/\sqrt{T}}$. *Calculer également le nombre de titres à détenir en portefeuille à la date* 0 *pour se couvrir.*
2. *Est-ce que les résultats obtenus semblent converger quand* T *devient grand ?*

2.3 Couverture d'options américaines

Une option américaine est un produit dérivé donnant le droit à son acheteur de recevoir un payoff G_t s'il décide de l'exercer en t avant sa maturité T. Ce payoff est une variable aléatoire que l'on observe seulement en t. La famille $(G_t)_{t\leq T}$ forme donc un processus adapté, i.e. G_t ne dépend de ω qu'à travers ω^t.

Exemple 2.17 *Une option de vente américaine de strike* K *correspond au payoff* $G_t(\omega) = [K - S_t(\omega)]^+$.

Il est possible de se couvrir contre l'exercice d'une option américaine en la vendant à un prix et en suivant une stratégie de couverture donnés par un algorithme rétrograde similaire à (2.6)-(2.7). On pose :

$$\begin{array}{l} Y_t(\omega^t) := \max\{G_t(\omega^t)\ ;\ (1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t](\omega^t)\} \\ \phi_t(\omega^t) := (Y_{t+1}(\omega^t,\mathrm{u}) - Y_{t+1}(\omega^t,\mathrm{d}))/(S_{t+1}(\omega^t,\mathrm{u}) - S_{t+1}(\omega^t,\mathrm{d})) \end{array} \tag{2.8}$$

que l'on initialise avec

$$Y_T := G_T. \tag{2.9}$$

En effet, considérons cette stratégie ϕ et supposons que $Y_s = V_s^{p,\phi}$ pour $s \le t$, où $p := Y_0$, i.e. Y coïncide avec le processus de portefeuille partant de Y_0 et suivant ϕ. Alors, par construction, $V_s^{p,\phi} = Y_s \ge G_s$ pour tout $s \le t$. Si l'option a été exercée avant t, notre portefeuille de couverture était donc suffisant pour payer le payoff à l'acheteur. Par ailleurs, $V_t^{p,\phi} \ge (1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t]$. D'après les résultats de la section précédente et la définition de ϕ_t cela implique que $V_{t+1}^{p,\phi} \ge Y_{t+1} \ge G_t$ et on est donc également couvert contre un exercice en $t+1$ s'il n'a pas eu lieu avant. Il suffit maintenant d'itérer cet argument jusqu'en T.
De fait, on ne peut pas se couvrir sans prendre de risque si l'on part d'un prix $p' < p$. En effet, supposons qu'il existe une stratégie ϕ' telle que $V_t^{p',\phi'} \ge G_t$ pour tout $t \le T$. D'après la Remarque 2.7, $\beta V^{p',\phi'}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, et donc $V_t^{p',\phi'} \ge (1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}^{p',\phi'}|\mathcal{F}_t]$. Ceci implique que $V^{p',\phi'}$ vérifie l'algorithme (2.8)-(2.9) avec $\ge$ au lieu de $=$. On en déduit que $V_t^{p',\phi'} \ge Y_t$ pour tout $t \le T$: c'est vrai en T ; si c'est vrai en $t+1$ alors $V_t^{p',\phi'} \ge \max\{G_t\ ;\ (1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_{t+1}^{p',\phi'}|\mathcal{F}_t]\} \ge \max\{G_t\ ;\ (1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t]\} = Y_t$.
Ceci montre que $p' = V_0^{p',\phi'} \ge Y_0 = p$.
On a fait le raisonnement pour une couverture partant de la date 0. Si on commence plus tard à une date t, il faut que le portefeuille de couverture vaille au moins Y_t à cette date (par le même raisonnement).

Conclusion 2.18 *Il est possible se couvrir contre l'exercice de l'option américaine en suivant la stratégie définie dans l'algorithme* (2.8)-(2.9) *jusqu'au moment où l'acheteur exerce l'option. La quantité Y_0 est le plus petit prix auquel l'option peut-être vendue si l'on souhaite se couvrir sans prendre de risque. Si l'option n'a pas encore été exercée en t, alors Y_t est le plus petit prix auquel l'option pourrait être vendue en t si l'on veut se couvrir à partir de cette date sans prendre de risque.*

La date τ à laquelle l'option est exercée n'est en général pas connue par l'acheteur avec certitude en $t = 0$. Tout dépend des conditions de marché, on verra plus loin qu'il existe en fait une date d'exercice optimale dans un certain sense - qui est celle utilisée en pratique dans les marchés. Cette date est donc une variable aléatoire. Toutefois, à chaque date t, on sait si l'option a été exercée ou pas. C'est donc une variable aléatoire τ telle que l'évènement $\{\tau \leq t\}$ est connu en t, pour chaque date $t \leq T$. C'est ce que l'on appelle un temps d'arrêt.

Terminologie 2.19 (Temps d'arrêt) *Un temps d'arrêt est une variable aléatoire τ telle que l'évènement $\{\tau \leq t\}$ est connu en t, pour tout $t \leq T$.*

Excercice 2.20 *Montrer que $\{\tau > s\}$ et $\{\tau = s\}$ sont connus en t quel que soit $s \leq t$, si τ est un temps d'arrêt.*

Par la suite, on se restreindra aux temps d'arrêt à valeur dans $\{0, 1, \ldots, T\}$, i.e. l'exercice à lieu au plus tard en T. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble de ces temps d'arrêt. Notons qu'imposer d'exercer son option au moins en T (si cela n'a pas déjà été fait avant) n'est pas restrictif, on peut toujours modifier le payoff de manière à ce que $G_T \geq 0$.

Excercice 2.21 *Notons $x \wedge y := \min\{x, y\}$ et $x \vee y := \max\{x, y\}$. Dire si les variables aléatoires τ ci-dessous sont des temps d'arrêt et justifier votre réponse.*

1. $\tau := 2$.
2. $\tau := \min\{t \geq 0 : S_t \geq 1\} \wedge T$.
3. $\tau := \max\{t \geq 0 : S_t \geq 1\} \wedge T$.
4. $\tau := \tau_1 \wedge \tau_2$ *où* $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$.
5. $\tau := \tau_1 \vee \tau_2$ *où* $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$.
6. $\tau := \tau_1 - 1$ *où* $\tau_1 \in \mathcal{T}$ *tel que* $\tau_1 \geq 1$.

Si l'on connaissait cette date τ à l'avance, il suffirait de se couvrir contre le payoff G_τ. En regardant τ comme une maturité (aléatoire), le prix serait alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau G_\tau]$. Comme on ne la connait pas, ce n'est pas le cas. Toutefois, on peut interpréter le prix de couverture comme le pire des cas au sens où

$$Y_0 = \max_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau G_\tau]. \tag{2.10}$$

On peut même caractériser complètement l'optimum au problème ci-dessus et montrer qu'il s'agit du temps auquel l'acheteur devrait exercer son option.

Terminologie 2.22 (Arrêt optimal) *Le problème de maximisation défini dans* (2.10) *est un problème d'arrêt optimal. C'est un cas particulier de problème de contrôle optimal stochastique. Le temps d'arrêt qui réalise l'optimum est le temps d'arrêt optimal. La quantité obtenue en prenant le max est appelée la valeur du problème d'arrêt optimal.*

On montre maintenant le résultat énoncé. Tout d'abord, fixons un temps d'arrêt τ. Alors, $V_\tau^{p,\phi} \geq Y_\tau \geq G_\tau$. En particulier, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}] \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau G_\tau]$. Par ailleurs, comme $\{\tau \leq t\}$, et donc $\{\tau > t\}$ est connu en t, quel que soit $t \leq T-1$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau<T\}} + \beta_{T-1}(1+r)^{-1}V_T^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau=T\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau<T\}} + \beta_{T-1}(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau=T\}}|\mathcal{F}_{T-1}]\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau<T\}} + \beta_{T-1}(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau>T-1\}}|\mathcal{F}_{T-1}]\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau<T\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>T-1\}}\beta_{T-1}(1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[V_T^{p,\phi}|\mathcal{F}_{T-1}]\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_\tau V_\tau^{p,\phi}\mathbf{1}_{\{\tau\leq T-1\}} + \mathbf{1}_{\{\tau>T-1\}}\beta_{T-1}V_{T-1}^{p,\phi}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\beta_{\tau\wedge(T-1)}V_{\tau\wedge(T-1)}^{p,\phi}\right] \\
&= \ldots \\
&= \beta_0 V_0^{p,\phi} \\
&= p.
\end{aligned}$$

On a donc $p \geq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau G_\tau]$ quel que soit $\tau \in \mathcal{T}$.

Remarque 2.23 *L'argument ci-dessus peut être utilisé pour montrer que le processus* $(\beta_{t\wedge\tau}V_{t\wedge\tau}^{p,\phi})_{t\leq T}$ *est une martingale sous* $\mathbb{Q}$. *Ceci ne dépend pas de la richesse initiale* p *ni de la stratégie* ϕ.

Il reste à montrer que l'on peut trouver un temps d'arrêt $\hat{\tau}$ tel que $p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}}G_{\hat{\tau}}]$. Celui-ci est le premier temps où Y est égal au payoff

$$\hat{\tau} := \min\{t \leq T \;:\; Y_t = G_t\}. \tag{2.11}$$

Excercice 2.24 *Montrer que* $\hat{\tau}$ *défini dans* (2.11) *est un temps d'arrêt.*

En effet, on a $Y_{\hat{\tau}} = G_{\hat{\tau}}$, alors que si $t < \hat{\tau}$ on a $Y_t > G_t$ ce qui implique $Y_t = (1+r)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t]$ où encore $\beta_t Y_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{t+1}Y_{t+1}|\mathcal{F}_t]$. Ceci montre que $(\beta_{t\wedge\hat{\tau}}Y_{t\wedge\hat{\tau}})_{t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$. D'après l'Exercice 2.6, on en déduit que $p = Y_0 = \beta_{0\wedge\hat{\tau}}Y_{0\wedge\hat{\tau}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{T\wedge\hat{\tau}}Y_{T\wedge\hat{\tau}}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}}Y_{\hat{\tau}}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}}G_{\hat{\tau}}]$.

Conclusion 2.25 *Le prix p peut être interprété comme la valeur du problème d'arrêt optimal défini dans* (2.10)*. Le temps d'arrêt optimal est le premier temps où le prix de couverture de l'option Y est égal au payoff G. Par ailleurs, si le marché est compétitif, Y_t est le seul prix possible pour cette option à la date t, si elle n'a pas encore été exercée.*

Nous n'avons pas encore montrer la dernière assertion. Faisons le pour $t = 0$. Tout d'abord, il est clair que si l'option est vendue à un prix strictement plus grand que Y_0 alors le vendeur gagne de l'argent sans prendre de risque. Si au contraire, elle est achetée à un prix $p' < Y_0 = p$ alors l'acheteur peut gagner de l'argent en l'exerçant en $\hat{\tau}$. En effet, on a vu que $p = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}} V_{\hat{\tau}}^{p,\phi}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}} Y_{\hat{\tau}}]$ ce qui implique que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}}(V_{\hat{\tau}}^{p,\phi} - Y_{\hat{\tau}})] = 0$. Or $V_{\hat{\tau}}^{p,\phi} \geq Y_{\hat{\tau}}$. On a donc nécessairement $V_{\hat{\tau}}^{p,\phi} = Y_{\hat{\tau}}$. Donc, $V_{\hat{\tau}}^{p,\phi} = G_{\hat{\tau}}$ et $V_{\hat{\tau}}^{-p',-\phi} + G_{\hat{\tau}} = (p - p')(1 + r)^{\hat{\tau}} - V_{\hat{\tau}}^{p,\phi} + G_{\hat{\tau}} = (p - p')(1 + r)^{\hat{\tau}} > 0$. Si le vendeur est lui-même capable de trader sur le marché, il réalise donc un arbitrage.

Pour conclure, on montre que la date optimale d'exercice pour l'acheteur est $\hat{\tau}$, si le marché de l'occasion est suffisamment liquide pour cette option. Tout d'abord, il est inefficace d'exercer en t si $t < \hat{\tau}$ puisque dans ce cas l'option vaut Y_t sur la marché alors que l'exercice ne rapport que $G_t < Y_t$. Exercer après $\hat{\tau}$ est également inutile (et peut conduire à une perte). En effet, on sait que $V_{\hat{\tau}}^{p,\phi} = Y_{\hat{\tau}} = G_{\hat{\tau}}$. Si on exerce en $\hat{\tau}$, on obtient donc un montant égal à $V_{\hat{\tau}}^{p,\phi}$. En suivant la stratégie ϕ à partir de t, on se garantit donc $V_t^{p,\phi}$ pour tout $t > \hat{\tau}$ alors qu'exercer en $t > \hat{\tau}$ ne rapporte que $G_t \leq Y_t \leq V_t^{p,\phi}$. En exerçant en $\hat{\tau}$, on se garantit donc le maximum que l'on puisse obtenir par la suite. En général, on a même $G_t < V_t^{p,\phi}$ avec probabilité non nulle quand $t > \hat{\tau}$. Ne pas exercer en $\hat{\tau}$ conduit donc à une perte potentielle.

Conclusion 2.26 *Si le marché de l'occasion est liquide, le temps d'exercice qu'un acheteur rationnel choisi est le premier instant où le prix de marché de l'option est égal à son payoff.*

Excercice 2.27 (Evaluation d'un put américain) *En utilisant excel, calculer le prix d'une option de vente américaine de strike* 100 *pour les maturités $T = 1, 2, 10, 20, 30, 40, 50$ dans le modèle de paramètres : $S_0 = 100$, $1 + r = e^{0.05/T}$, u $= e^{0.2/\sqrt{T}}$, d $= e^{-0.2/\sqrt{T}}$. Calculer également le nombre de titres à détenir en portefeuille à la date* 0 *pour se couvrir. Observe-t-on une convergence du résultat pour les grandes valeurs de T ?*

Excercice 2.28 (Evaluation d'un call américain) *Reprendre l'exercice précédent pour une option d'achat. Qu'elle différence de prix observe-t-on avec le l'option d'achat européenne ?*

2.4 Prise en compte des dividendes

On suppose dans cette section que l'action paie un dividende à la date t égal à δ_t fois la valeur du titre, $0 \leq \delta_t < 1$ étant un réel. On note S_{t-} la valeur en t de l'action avant la tombée du dividende et S_t sa valeur après. Le dividende payé en t est donc $\delta_t S_{t-}$. Par un raisonnement d'arbitrage évident, on doit avoir $S_t = S_{t-}(1 - \delta_t)$. Si ce n'est pas le cas, on achète (ou vend) l'action juste avant la tombée du dividende et on clôt sa position juste après.
On reprend le modèle des sections précédentes entre les tombées de dividendes. Ceci donne

$$S_{t+1-}(\omega) = S_t(\omega)\omega_{t+1} \text{ et } S_{t+1}(\omega) = S_{t+1-}(\omega)(1 - \delta_{t+1})$$

ce qui implique que

$$S_{t+1}(\omega) = S_t(\omega)\omega_{t+1}(1 - \delta_{t+1}).$$

On considère maintenant que ϕ_t correspond au nombre de titres détenus sur $]t, t+1]$. Autrement dit, on détient ϕ_{t-1} titres au moment de la tombée du dividende $\delta_t S_{t-}$, puis on re-balance son portefeuille pour détenir ϕ_t titres jusqu'en $t+1$ (la transaction en t se fait au prix S_t), date à laquelle on re-balance à nouveau juste après la tombée du dividendes de $t+1$, etc.
La dynamique du portefeuille est donc

$$V_{t+1}^{x,\phi} = V_t^{x,\phi} + \phi_t(S_{t+1} - S_t) + r(V_t^{x,\phi} - \phi_t S_t) + \phi_t \delta_{t+1} S_{t+1-}.$$

Le dernier terme correspond aux dividendes reçus au titre de la détention de ϕ_t titres au moment de la tombée du dividende de $t+1$. On peut ré-écrire cette équation sous la forme

$$\begin{aligned} V_{t+1}^{x,\phi} &= V_t^{x,\phi} + \phi_t(S_{t+1-}(1 - \delta_{t+1}) - S_t) + r(V_t^{x,\phi} - \phi_t S_t) + \phi_t \delta_{t+1} S_{t+1-} \\ &= V_t^{x,\phi} + \phi_t(S_{t+1-} - S_t) + r(V_t^{x,\phi} - \phi_t S_t), \end{aligned}$$

où encore

$$\tilde{V}_{t+1}^{x,\phi} = \tilde{V}_t^{x,\phi} + \phi_t(\tilde{S}_{t+1-} - \tilde{S}_t).$$

Si l'on compare avec les dynamiques obtenues en l'absence de dividendes, on observe que tout se passe comme si l'on investissait dans un titre dont la valeur actualisée à la dynamique

$$\tilde{Z}_{t+1} = \tilde{Z}_t + \tilde{S}_{t+1-} - \tilde{S}_t$$

avec $\tilde{Z}_0 = \tilde{S}_0$. C'est-à-dire,

$$\tilde{V}^{x,\phi}_{t+1} \quad = \quad \tilde{V}^{x,\phi}_t + \phi_t(\tilde{Z}_{t+1} - \tilde{Z}_t).$$

Ce titre correspond à la valeur de S corrigée du paiement des dividendes. Une fois actualisée, c'est une martingale sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ associée au poids q défini dans (1.3), tout comme la richesse actualisée reste une martingale sous $\mathbb{Q}$. La seule différence notable est que le processus de prix actualisé $\tilde{S}$ n'est plus une martingale sous $\mathbb{Q}$. Ce n'est pas important. Tous les développements faits ci-dessus n'utilisaient jamais vraiment le fait que $\tilde{S}$ est une martingale, la seule chose vraiment importante est que les processus de portefeuille actualisé le soit. On peut donc reprendre ligne à ligne ce qui a été fait dans les sections précédentes et en tirer les mêmes conclusions.

Conclusion 2.29 *Toutes les Conclusions des Sections 2.2 et 2.3 restent valables dès lors que l'on remplace S par Z dans les équations* (2.6) *et* (2.8)*, et que la mesure $\mathbb{Q}$ servant à l'évaluation des options est définie par*

$$\mathbb{Q}[S_{t+1-} = \mathrm{u}S_t|\mathcal{F}_t] = 1 - \mathbb{Q}[S_{t+1-} = \mathrm{d}S_t|\mathcal{F}_t] = q$$

où q est donné par (1.3)*. C'est la mesure qui rend $\tilde{Z}$ martingale.*

Remarque 2.30 *Ce n'est pas parce que l'on remplace S par Z dans les algorithmes définissant les stratégies de couverture et dans la définition de $\mathbb{Q}$ que l'on remplace S par Z dans l'expression des payoffs. Par exemple, si le payoff d'une option européenne est $G = g(S_T)$ pour une fonction déterministe g donnée, il n'est pas question de le remplacer par $g(Z_T)$ dans les formules. Le payoff est le payoff !*

Excercice 2.31 (Evaluation d'un call avec dividendes) 1. *En utilisant excel, calculer le prix d'une option d'achat européenne de strike* 100 *pour les maturités $T = 1, 2, 10, 20, 30, 40, 50$ dans le modèle de paramètres : $S_0 = 100$,*

$1 + r = e^{0.05/T}$, u $= e^{0.2/\sqrt{T}}$, d $= e^{-0.2/\sqrt{T}}$, $\delta_t = 0.07$ *pour tout* $t \leq T$. *Calculer également le nombre de titres à détenir en portefeuille à la date* 0 *pour se couvrir. Observe-t-on une convergence du résultat pour les grandes valeurs de* T *?*
2. *Reprendre cet exercice dans le cas d'une option d'achat américaine. Observe-t-on une différence de prix ? Comparer avec la conclusion de l'Exercice 2.28.*

3 Eléments de correction des exercices

Exercice 1.2 On a $\mathbb{P}[S_1 = uS_0] = \mathbb{P}[\omega_1] = p$. Soit $X := (S_1 - dS_0)/(uS_0 - dS_0)$ alors X prend les valeurs 1 et 0 avec probabilités respectives p et $1-p$, i.e. suit une Bernoulli de paramètre p. $\mathbb{E}[S_1] = \mathbb{P}[\omega_1]uS_0 + \mathbb{P}[\omega_2]dS_0 = S_0(pu + (1-p)d)$. De même, $\mathbb{E}[S_1^2] = S_0^2(pu^2 + (1-p)d^2)$, d'où $\mathrm{Var}\,[S_1] = \mathbb{E}[S_1^2] - \mathbb{E}[S_1]^2 = S_0^2(pu^2 + (1-p)d^2) - S_0^2(p^2u^2 + (1-p)^2d^2 + 2p(1-p)ud) = p(1-p)(u-d)^2S_0^2$ $(= (u-d)^2S_0^2\mathrm{Var}\,[X])$. □

Exercice 1.5 Sous $\mathbb{P}$, $V_1^{x,\phi}$ vaut $x + \phi_0S_0(u-1) + r(x - \phi_0S_0)$ avec probabilité p et vaut $x + \phi_0S_0(d-1) + r(x - \phi_0S_0)$ avec probabilité $1-p$. $V_0^{x,\phi}$ est connu en 0 car non aléatoire. La valeur de $V_1^{x,\phi}$ est connue si on connait S_1. Le processus est donc adapté. □

Exercice 1.8.

1. Supposons que $1 + r \geq u$. Comme $u > d$, on obtient un arbitrage en prenant $\phi_0 = -1$ car $-S_0(u-1-r) \geq 0$ et $-S_0(d-1-r) > 0$. Supposons maintenant que $1 + r \leq d$. Comme $u > d$, on obtient un arbitrage en prenant $\phi_0 = 1$ car $S_0(u-1-r) > 0$ et $S_0(d-1-r) \geq 0$.
2. Interprétation : on ne peut pas réaliser un gain strictement positif avec probabilité non nulle sans risquer de faire une perte.
3. Dire que $V_1^{0,\phi}(\omega) \geq 0$ pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$ est équivalent à dire que $V_1^{0,\phi} \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. Dire que $V_1^{0,\phi}(\omega) = 0$ pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$ est équivalent à dire que $V_1^{0,\phi} = 0$ $\mathbb{P}-$p.s., i.e. que $\mathbb{P}[V_1^{0,\phi} > 0] = 0$.
4. On a montré dans 1. que la condition $u > 1 + r > d$ est nécessaire à l'absence d'opportunité d'arbitrage. Pour montrer l'équivalence, il faut montrer qu'elle l'implique. Si $V_1^{0,\phi}(\omega) \geq 0$ pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$ alors (par définition) $\phi_0S_0(u-1) + r(0 - \phi_0S_0) \geq 0$ et $\phi_0S_0(d-1) + r(0 - \phi_0S_0) \geq 0$.

Autrement dit, $\phi_0 S_0(u-1-r) \geq 0$ et $\phi_0 S_0(d-1-r) \geq 0$. Si $u > 1+r > d$, et comme $S_0 > 0$, on obtient alors $\phi_0 \geq 0$ et $\phi_0 \leq 0$, soit $\phi_0 = 0$, ce qui implique que $V_1^{0,\phi}(\omega) = 0$ pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$. $\square$

Exercice 2.1 On a $S_t(\omega) = S_0 \prod_{s=1,\dots,t} \omega_s = S_0 \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_t$ et $S_{t+1}(\omega) = S_0 \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_t \omega_{t+1}$. $\square$

Exercice 2.3. 1. Comme $(\omega_1, \cdots, \omega_{T-1})$ est connu en $T-1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\omega] &= \mathbb{E}[\mathbb{P}[(\omega_1, \cdots, \omega_{T-1}, \omega_T)|\mathcal{F}_{T-1}]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(\omega_1, \cdots, \omega_{T-1})} \mathbb{P}[\omega_T|\mathcal{F}_{T-1}]]. \end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}[\omega_T|\mathcal{F}_{T-1}]$ vaut p si $\omega_T = \mathrm{u}$ et $(1-p)$ si $\omega_T = \mathrm{d}$. D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\omega] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(\omega_1, \cdots, \omega_{T-1})}(p\mathbf{1}_{\omega_T=\mathrm{u}} + (1-p)\mathbf{1}_{\omega_T=\mathrm{d}})] \\ &= \mathbb{P}[(\omega_1, \cdots, \omega_{T-1})](p\mathbf{1}_{\omega_T=\mathrm{u}} + (1-p)\mathbf{1}_{\omega_T=\mathrm{d}}). \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[(\omega_1, \cdots, \omega_{T-1})] &= \mathbb{E}[\mathbf{1}_{(\omega_1, \cdots, \omega_{T-2})} \mathbb{P}[\omega_{T-1}|\mathcal{F}_{T-2}]] \\ &= \mathbb{P}[(\omega_1, \cdots, \omega_{T-2})](p\mathbf{1}_{\omega_{T-1}=\mathrm{u}} + (1-p)\mathbf{1}_{\omega_{T-1}=\mathrm{d}}) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{P}[\omega] = \mathbb{P}[(\omega_1, \cdots, \omega_{T-2})](p\mathbf{1}_{\omega_{T-1}=\mathrm{u}} + (1-p)\mathbf{1}_{\omega_{T-1}=\mathrm{d}})(p\mathbf{1}_{\omega_T=\mathrm{u}} + (1-p)\mathbf{1}_{\omega_T=\mathrm{d}}).$$

On répète cet argument pour obtenir

$$\mathbb{P}[\omega] = \prod_{s=1}^{T}(p\mathbf{1}_{\omega_s=\mathrm{u}} + (1-p)\mathbf{1}_{\omega_s=\mathrm{d}})$$

ce qui est une reformulation du résultat à démontrer.
2. Si $\mathrm{u} = 1$ et $\mathrm{d} = 0$, c'est une loi binomiale de probabilité p et de nombre d'itérations T, $B(p, T)$.
3. Pour avoir $S_T = \mathrm{u}^n \mathrm{d}^{T-n} S_0$, il faut que n éléments parmi $\omega_1, \dots, \omega_T$ prennent la valeur u. Une suite vérifiant cette condition à une probabilité $p^n(1-p)^{T-n}$, cf 1. Il y a $\frac{T!}{n!(T-n)!}$ suites différentes qui vérifient cette propriété. En effet, choisir une suite vérifiant cette condition revient à choisir n dates t auxquelles

ω_t = u. Pour choisir la première de ces n dates, on a T choix, pour la seconde $T-1$ choix, ..., pour la $n$ième il reste $T-n+1$ choix, soit un total de $T(T-1)(T-2)\cdots(T-n+1) = T!/(T-n)!$. Cependant, en procédant de la sorte on choisit $n!$ la même suite (on peut choisir la première date en 2 et la seconde en 1, puis la première en 1 et la seconde en 2). $n!$ est n façons de choisir la première date parmi les n retenues, $n-1$ choix pour la seconde parmi les n, etc... On a donc seulement $T!/[n!(T-n)!]$ suites réellement différentes. □

Exercice 2.6. Soit $s \leq t$. On a $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]|\mathcal{F}_s]$. Or $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_{t-1}]$ $= X_{t-1}$, donc $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_{t-1}|\mathcal{F}_s]$. Si $t-1 > s$, on répète l'argument : $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_{t-1}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_{t-1}|\mathcal{F}_{t-2}]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_{t-2}|\mathcal{F}_s]$, et donc $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_{t-2}|\mathcal{F}_s]$. En itérant de la sorte, on finit par obtenir $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_s|\mathcal{F}_s]$ $= X_s$ (puisque X_s est connu en s). □

Exercice 2.8 D'après l'Exercice 2.6 appliqué à $X = \tilde{V}^{x,\phi}$, $t = T$ et $s = 0$, on a bien

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{x,\phi}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{x,\phi}|\mathcal{F}_0] = \tilde{V}_0^{x,\phi} = x.$$

Si $X \geq 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et $X(\tilde{\omega}) > 0$ pour au moins un $\tilde{\omega} \in \Omega$, alors $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}[\omega] \geq X(\tilde{\omega})\mathbb{P}[\tilde{\omega}] > 0$. Si

$$V_T^{0,\phi} \geq 0 \ \ \mathbb{P}-\text{p.s.} \ \text{ et } \ \mathbb{P}[V_T^{0,\phi} > 0] > 0,$$

alors $V_T^{0,\phi}(\omega) \geq 0$ pour tout ω et il existe au moins un $\tilde{\omega}$ tel que $V_T^{0,\phi}(\tilde{\omega}) > 0$. D'après ce qui précède, ceci impliquerait que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{V}_T^{0,\phi}] > 0$, or cette quantité est nulle d'après ce qui précède. □

Exercice 2.10. Si $X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi|\mathcal{F}_t]$, alors, pour $s \leq t$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]$ $= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi|\mathcal{F}_s] = X_s$. Donc, X est une $\mathbb{Q}$-martingale. Si X est défini par $X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T\xi|\mathcal{F}_t]/\beta_t$ alors $\beta_t X_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T\xi|\mathcal{F}_t]$ et on peut utiliser le résultat précédent en remplaçant ξ par $\beta_T\xi$ et X par $(\beta_t X_t)_{t\leq T}$. □

Exercice 2.11. Pour montrer que $V_t^{x,\phi} = Y_t$ pour tout $t \leq T$, on vérifie tout d'abord que $(\beta_t Y_t)_{t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ (faire le calcul). Ceci implique que $Y_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$ et donc que $V_0^{x,\phi} = x = Y_0$. On montre ensuite que si $V_t^{x,\phi} = Y_t$ alors $V_{t+1}^{x,\phi} = Y_{t+1}$ (comparer les équations donnant leur dynamique).

□

Exercice 2.13 Il faut calculer $\mathbb{E}^Q[\beta_T G]$. On obtient le résultat en utilisant celui de l'Exercice 2.3. □

Exercice 2.20. Par définition, $\{\tau \leq s\}$ est connu en s, or $\{\tau > s\}$ est l'évènement complémentaire ("opposé"), et est donc également connu. Quant à $\{\tau = s\}$, il est identique à $\{\tau \leq s\} \cap \{\tau > s-1\}$ ("$\{\tau \leq s\}$ et $\{\tau > s-1\}$", le premier est connu en s, le second est connu en $s-1$ et donc en s également. □

Exercice 2.21

1. $\tau := 2$: oui car $2 \leq t$ est connu en t (toujours vrai ou toujours faux).
2. $\tau := \min\{t \geq 0 : S_t \geq 1\} \wedge T$: oui car $\{\tau \leq t\} = \{S_0 \geq 1\} \cup \{S_1 \geq 1\} \cup \cdots \cup \{S_{t-1} \geq 1\} \cup \{S_t \geq 1\}$ si $t < T$, et tous ces évènements sont connus en t, alors que $\{\tau \leq T\}$ est toujours vrai et donc connu en T.
3. $\tau := \max\{t \geq 0 : S_t \geq 1\} \wedge T$: non car en général on ne sait si $\{\tau \leq t\}$ qu'en T.
4. $\tau := \tau_1 \wedge \tau_2$ où $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$: oui car $\{\tau \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cup \{\tau_2 \leq t\}$ et chacun de ces évènements est connu en t.
5. $\tau := \tau_1 \vee \tau_2$ où $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$: oui car $\{\tau \leq t\} = \{\tau_1 \leq t\} \cap \{\tau_2 \leq t\}$.
6. $\tau := \tau_1 - 1$ où $\tau_1 \in \mathcal{T}$ tel que $\tau_1 \geq 1$: non car $\{\tau \leq t\} = \{\tau_1 \leq t+1\}$ qui n'est a priori connu qu'en $t+1$ et non en t. □

Exercice 2.24 $\{\hat{\tau} \leq T\}$ est toujours vrai car $Y_T = G_T$. Par ailleurs, pour $t < T$, $\{\hat{\tau} \leq t\} = \{Y_0 = G_0\} \cup \cdots \cup \{Y_t = G_t\}$ et chacun de ces évènements est connu en t. □

Chapitre 2

Calcul stochastique en temps continu : les outils pour le modèles de Black et Scholes

Avant d'entamer ce chapitre, il faut être au point sur le chapitre précédent. Ça va se compliquer un peu... même si l'on va chercher à mener nos constructions petit à petit en n'utilisant à chaque étape que des outils simples. Le seul impératif est de ne pas sauter une étape !

A partir de maintenant, le temps évolue de manière continue sur $\mathbb{R}_+$.

1 Mouvement Brownien et modèle de Black et Scholes

Dans le modèle de Black et Scholes, le cours de l'action est modélisé par un processus S défini par

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.1}$$

où μ est la dérive (ou tendance, ou drift en anglais), $\sigma > 0$ est la volatilité et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien.
L'objet de cette section est de préciser ce que l'on entend par mouvement brownien. On commence par se donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ pour fixer un cadre probabiliste. On rappelle qu'une assertion est vrai $\mathbb{P}$-p.s. si elle est vraie avec probabilité 1 pour $\mathbb{P}$.

Définition 1.1 (Mouvement brownien) *On dit qu'un processus W est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$ si*

a. $W_0 = 0$ [1],

b. $t \in \mathbb{R}_+ \mapsto W_t$ *est une fonction continue* $\mathbb{P}-$p.s.,

c. $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ [2] *pour tout* $t \geq s \geq 0$,

d. $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \ldots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *sont indépendants quels que soient* $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $n \geq 1$.

Dans la suite de cette section, W désigne toujours un mouvement brownien.

Remarque 1.2 *On déduit de la définition de S et W que $\ln S_t$ suit une loi normale, i.e. que S_t suit une loi lognormale. Ce sera très pratique pour faire des calculs mais peut réaliste si on compare la distribution engendrée par ce modèle à des données de marché. Par contre, les trajectoires de W, et donc celles de S, sont très erratiques. On peut l'observer dans l'Exercice 1.6 ci-dessous. De fait, tout se passe comme si la direction prise par W changeait de sens sans arrêt. Mathématiquement, on peut montrer que $t \mapsto W_t$ n'est pas dérivable ($\mathbb{P}-$p.s.).*

Excercice 1.3 *Montrer les assertions suivantes :*

1. $\mathbb{E}[W_t W_s] = t \wedge s$.
2. $\mathbb{E}[\int_0^t |W_s|^2 ds] = t^2/2$.
3. $\mathbb{E}[e^X] = e^{b+\frac{1}{2}a}$ *si* $X \sim \mathcal{N}(b, a)$.
4. $\mathbb{E}[\int_0^t |S_s|^2 ds] = S_0^2(e^{(2\mu+\sigma^2)t} - 1)/(2\mu + \sigma^2)$.

Par la suite on notera $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par la trajectoire de W, i.e. $\mathcal{F}_t$ est donnée par $\sigma(W_s, s \leq t)$ qui contient toute l'information qui ne dépend que de la trajectoire de W entre 0 et t. [3] On observe que $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ pour $t \geq s$, du fait de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien.

Excercice 1.4 *Soit $t \geq s$. Quelle est la loi de $W_t - W_s$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$? Quelle est la loi de $\ln(S_t) - \ln(S_s)$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$?*

1. C'est une normalisation de convenance.
2. On note $\mathcal{N}(b, a)$ la loi normale de moyenne b et variance $a > 0$.
3. Techniquement, il faut y ajouter tout ce qui advient après probabilité nulle, ce que l'on appelle les ensembles négligeables. On ne détaille pas ce point qui est sans importance pour nous.

Excercice 1.5 *Soit $t \geq s$. Montrer que $\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_s] = e^{\mu(t-s)}S_s$.*

Excercice 1.6 *En utilisant excel, générer avec un simulateur de loi normale des valeurs W_{t_0}, $W_{t_1} - W_{t_0}$, ..., $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ d'une trajectoire de W en prenant $t_i = i/n$ et $n = 10, 20, 50, 100$. En déduire les valeurs correspondantes de S aux dates $(t_i)_{i\leq n}$. Les reporter sur un graphique. Que peut-on dire de ces trajectoires ?*[4]

Excercice 1.7 *On veut calculer $p = \mathbb{E}[[S_T - K]^+]$. On note $\theta := \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Montrer les étapes de calcul qui suivent puis conclure :*

1. $p = \mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T\geq K}] - K\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_T\geq K}]$
2. $\mathbb{E}[\mathbf{1}_{S_T\geq K}] = \mathbb{P}[W_T \geq \sqrt{T}a_1]$ *où* $a_1 := (\ln(K/S_0) - \theta T)/(\sigma\sqrt{T})$.
3. $\mathbb{P}[W_T \geq a_1\sqrt{T}] = \mathbb{P}[W_T \leq -a_1\sqrt{T}] = \Phi(-a_1)$.
4. $\mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T\geq K}] = \int_{a_1}^{\infty} S_0 e^{\theta T+\sigma\sqrt{T}y}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$.
5. $\mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T\geq K}] = \int_{a_1}^{\infty} S_0 e^{\theta T+\frac{T\sigma^2}{2}}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{(y-\sqrt{T}\sigma)^2}{2}}dy$.
6. $\mathbb{E}[S_T \mathbf{1}_{S_T\geq K}] = S_0 e^{\mu T}(1 - \Phi(a_2)) = S_0 e^{\mu T}\Phi(-a_2)$ *où* $a_2 := a_1 - \sqrt{T}\sigma$.

2 Intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien

Afin de pouvoir construire le processus de portefeuille comme dans la Section 2 du Chapitre 1, il nous faut une notion d'intégrale stochastique sur un intervalle de temps $[0, T]$. Cette notion nous servira également à considérer des dynamiques de prix plus générales que celle proposée par Black et Scholes.

4. On peut générer une loi normale centrée réduite de deux manières différentes. 1. On tire dans une loi uniforme sur $[0, 1]$ une valeur U et on renvoie $\Phi^{-1}(U)$, où Φ est la fonction de répartition de la gaussienne centrée réduite. 2. On tire indépendamment deux uniformes sur $[0, 1]$ et on applique aux résultats U_1 et U_2 les formules (de Box-Müller) $X_1 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\cos(2\pi U_2)$ et $X_2 = \sqrt{-2\ln(U_1)}\sin(2\pi U_2)$: ceci renvoie deux tirages indépendants X_1 et X_2 de la gaussienne. Numériquement, il est préférable d'utiliser la première méthode.

2.1 Processus simples

Il est facile de donner un sens à l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien pour les processus, dits simples, de la forme :

$$\phi_t = \xi_0 \mathbf{1}_{t=t_0} + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \mathbf{1}_{t_i < t \leq t_{i+1}} \tag{2.2}$$

avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ et où chaque ξ_i est une variable aléatoire connue en t_i vérifiant $\mathbb{E}[|\xi_i|^2] < \infty$. Il suffit en effet de la définir comme

$$\int_0^t \phi_s dW_s := I(\phi)_t := \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (W_{t \wedge t_{i+1}} - W_{t \wedge t_i}), \tag{2.3}$$

i.e. comme une simple somme de Riemann.

Excercice 2.1 *Soit ϕ un processus simple de la forme* (2.2). *Soit X le processus défini par $X_t = \int_0^t \phi_s dW_s$. Montrer les assertions suivantes.*

1. $X_t = X_{t_n}$ *si* $t \geq t_n$.
2. $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s + \xi_i \mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = X_s$ *si* $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$.
3. X *est une martingale.*
4. $\mathbb{E}[X_t^2|\mathcal{F}_s] = X_s^2 + \xi_i^2 \mathbb{E}[(W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s] = X_s^2 + \xi_i^2(t-s)$ *si* $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$.
5. $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[\int_0^t \phi_s^2 ds]$.
6. $t \mapsto X_t$ *est continue* $\mathbb{P} -$ p.s.
7. X_t *suit la loi normale* $\mathcal{N}(0, \int_0^t \phi_s^2 ds)$ *si* ϕ *est déterministe.*[5]

Excercice 2.2 *Soient ϕ, ϕ' deux processus simples. Montrer les assertions suivantes.*

1. $\phi - \phi'$ *est un processus simple.*
2. $\mathbb{E}[|\int_0^t (\phi_s - \phi'_s) dW_s|^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |\phi_s - \phi'_s|^2 ds]$.

2.2 Processus admissibles

Travailler avec des processus simples est un peu limité. On aimerait par exemple pouvoir donner un sens à une notion de trading en temps continu (même si c'est également irréaliste en pratique). Pour ce faire, il faut étendre la classe des processus pour lesquels l'intégrale stochastique est définie. On utilisera la classe suivante.

5. Ce n'est évidemment pas vrai en général !

Définition 2.3 *On dira que ϕ est un processus admissible s'il existe une suite de processus simples $(\phi^n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\mathbb{E}[\int_0^T |\phi_s - \phi_s^n|^2 ds] \to 0 \ \ quand \ \ n \to \infty.$$

On note $\mathcal{A}$ la famille formée par ces processus. Si $\phi \in \mathcal{A}$, alors on définit la famille $(I(\phi)_t)_{t\geq 0}$ comme le processus à trajectoires continues $\mathbb{P} - \mathrm{p.s.}$ tel que

$$\mathbb{E}[|I(\phi)_t - \int_0^t \phi_s^n dW_s|^2] \to 0 \ \ quand \ \ n \to \infty, \ t \leq T,$$

et on pose

$$\int_0^t \phi_s dW_s := I(\phi)_t, \ t \leq T.$$

Le fait que la famille $(\int_0^t \phi_s^n dW_s)_{n\geq 1}$ converge au sens ci-dessus vers une limite bien définie provient de 2. de l'Exercice 2.2 qui implique que c'est une suite de Cauchy dans le bon espace. Le fait que $(I(\phi)_t)_{t\leq T}$ peut être choisi à trajectoires continues est un peu plus subtil et on ne le démontrera pas.
Comme la convergence dans L^2 implique la converge $\mathbb{P} - \mathrm{p.s.}$ le long d'une sous-suite, la définition ci-dessus implique que l'intégrale $\int_0^t \phi_s dW_s$ peut être approchée au sens $\mathbb{P} - \mathrm{p.s.}$ (et L^2) par des sommes simples de la forme (2.3). Si W servait à modéliser le cours de l'action, ceci permettrait de donner une définition naturelle à l'évolution d'un portefeuille de trading en temps continu comme limite de portefeuilles de trading à rebalancement en temps discret, lorsque le pas de temps entre deux rebalancements tend vers 0.
Il est important de noter que $I(\phi)$ ne dépend pas de la suite de processus simples utilisée dans l'approximation : deux suites différentes, mais convergeant vers ϕ au sens de la définition ci-dessus, donneront la même intégrale stochastique. Cela vient du fait que $\mathbb{E}[|\int_0^t(\phi_s^n - \phi_s^{n'})dW_s|^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |\phi_s^n - \phi_s^{n'}|^2 ds]$ d'après l'Exercice 2.2.

Exemple 2.4 *Supposons que l'on veuille donner sens à $\int_0^t W_s dW_s$. On fixe $n \geq 1$, et $t_i^n := it/n$ pour $i \leq n$. On définit ensuite r_s^n comme le plus grand des t_i^n inférieur à s, i.e. le premier temps de la forme t_i^n juste avant s. On a alors*

$$\mathbb{E}[\int_0^t |W_{r_s^n} - W_s|^2 ds] = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \mathbb{E}[|W_{t_i^n} - W_s|^2] ds \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \frac{t}{n} = \frac{t^2}{n}.$$

On peut donc définir $\int_0^t W_s dW_s$ *comme la limite quand* $n \to \infty$ *de* $I_n := \int_0^t W_{r_s^n} dW_s = \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})$*. Calculons cette limite. On commence par écrire*

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \{(W_{t_{i+1}^n})^2 - (W_{t_i^n})^2\} + (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})W_{t_{i+1}^n} \\ &= (W_t)^2 - I_n - \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^2, \end{aligned}$$

de sorte que

$$2I_n = (W_t)^2 - \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^2.$$

On va montrer ci-dessous que $R_n := \mathbb{E}[\{\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^2 - t\}^2] \to 0$*. Ceci impliquera que*

$$\int_0^t W_s dW_s = \lim_{n\to\infty} I_n = (W_t^2 - t)/2.$$

Pour le montrer, on calcule (en utilisant l'indépendance des accroissements)

$$\begin{aligned} R_n &= \mathbb{E}[t^2 + \{\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^2\} - 2t \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^2] \\ &= t^2 - 2tn\frac{t}{n} + \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^4] \\ &\quad + \mathbb{E}[\sum_{i\neq j=0}^{n} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^2 (W_{t_j^n} - W_{t_{j+1}^n})^2] \\ &= t^2 - 2t^2 + n(n-1)\frac{t}{n}\frac{t}{n} + \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_i^n} - W_{t_{i+1}^n})^4]. \end{aligned}$$

Il reste à utiliser le résultat des questions 3. et 4. de l'Exercice 3.12 pour obtenir

$$R_n = t^2 - 2t^2 + n(n-1)\frac{t^2}{n^2} + n\frac{t^2}{n^2}.$$

Ce terme tend bien vers 0 *quand* $n \to \infty$.

Proposition 2.5 *Soit* $\phi \in \mathcal{A}$*, alors* $(I(\phi)_t)_{t\leq T}$ *est une martingale. De plus,* $\mathbb{E}[I(\phi)_t] = 0$ *et* $\mathbb{E}[|I(\phi)_t|^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |\phi_s|^2 ds]$*. Enfin, si* ϕ *est déterministe, alors* $I(\phi)_t$ *suit une loi normale.*

Preuve. Si $X_n \to X$ dans L^2 alors $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$ car $|\mathbb{E}[X_n]-\mathbb{E}[X]| \le \mathbb{E}[|X_n - X|^2]^{\frac{1}{2}}$ d'après l'inégalité de Jensen.[6] Combiné à la propriété de martingale de l'Exercice 2.1, ceci implique que $(I(\phi)_t)_{t\le T}$ est une martingale. La seconde assertion provient du point 5. du même exercice et du fait que $|a^2 - b^2| = |(a+b)|\,|a-b|$. La dernière provient de la propriété suivante : si X_n est une suite de loi normale $\mathcal{N}(b_n, a_n)$ telle que $X_n \to X$ dans L^2, et si $(b_n, a_n) \to (b, a)$ avec $a > 0$, alors $X \sim \mathcal{N}(b, a)$. En effet, la convergence L^2 implique la convergence en loi et il suffit donc de regarder la limite des fonctions caractéristiques.[7] $\square$

Ce résultat permet notamment de considérer une version un peu plus générale du modèle de Black et Scholes dans lequel la volatilité et le drift ne sont plus constants mais simplement des fonctions déterministes du temps

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s}, \quad t \le T \tag{2.4}$$

avec $t \mapsto (\mu_t, \sigma_t)$ déterministe telle que $\int_0^T |\mu_s|ds + \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < \infty$. On pourrait même simplement supposer que μ vérifie la condition ci-avant $\mathbb{P}-$p.s. et que σ est un processus admissible. Dans ce cas, on obtiendrait un modèle de type “volatilité stochastique”.

Excercice 2.6 *Soit S défini comme dans* (2.4) *pour des coefficients déterministes. Quelle est la loi de* $\ln S_t$ *? Reprendre l'Exercice 1.7 pour cette définition de S.*

On ne démontrera pas le résultat suivant qui montre en particulier que W et S sont eux-mêmes des processus admissibles, voir Exercice 1.3.

Proposition 2.7 *Si $t \mapsto \phi_t$ est $\mathbb{P}-$*p.s. *continue à gauche et si $\mathbb{E}[\int_0^T |\phi_s|^2 ds] < \infty$ alors ϕ est un processus admissible. Plus généralement, il suffit que ϕ soit prévisible au sens où ϕ_t est connu si on connait $\mathcal{F}_{t-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

6. Si f est convexe alors $\mathbb{E}[f(\xi)] \ge f(\mathbb{E}[\xi])$.

7. Voir par exemple Lacroix Y. et L. Mazliak (2006). *Probabilité - Variables aléatoires, Convergences, Conditionnement*, Ellipses, Paris.

3 Processus d'Itô, variation quadratique et lemme d'Itô

3.1 Définitions et résultats généraux

Etant donnés les résultats de la section précédente, on peut maintenant définir la notion de processus d'Itô. A partir de maintenant on note Λ l'ensemble des processus ϕ tels que $\int_0^t |\phi_s| ds < \infty$ $\mathbb{P}-$p.s.

Terminologie 3.1 *Soit* $(\gamma, \alpha) \in \Lambda \times \mathcal{A}$, $x \in \mathbb{R}$ *et* X *défini par*

$$X_t = x + \int_0^t \gamma_s ds + \int_0^t \alpha_s dW_s,\ t \leq T. \tag{3.5}$$

On dit que X *est un processus d'Itô.*

Une façon alternative d'écrire (3.5) est

$$dX_t = \gamma_t dt + \alpha_t dW_t. \tag{3.6}$$

Ceci exprime le fait que la variation de X sur un intervalle de temps infinitésimal dt a deux composantes. L'une est une variation "localement déterministe" $\gamma_t dt$. L'autre est un "choc aléatoire" lié à la variation du mouvement brownien $\alpha_t dW_t$.

Remarque 3.2 *Notons qu'un processus d'Itô* X *a des trajectoires* $\mathbb{P}-$p.s. *continues, i.e.* $t \mapsto X_t$ *est continue* $\mathbb{P}-$p.s.

Puisque la dynamique d'un processus d'Itô s'écrit en fonction de celle du mouvement brownien, on peut étendre l'intégrale stochastique de la manière suivante.

Terminologie 3.3 *Si* X *est un processus d'Itô de la forme* (3.5)*. On dit qu'un processus* ϕ *est* X*-intégrable, et on note* $\phi \in \mathcal{L}(X)$*, si* $\phi\gamma \in \Lambda$ *et* $\phi\alpha \in \mathcal{A}$*. Dans ce cas, on définit*

$$\int_0^t \phi_s dX_s := \int_0^t \phi_s \gamma_s ds + \int_0^t \phi_s \alpha_s dW_s.$$

Remarque 3.4 *L'intégrale stochastique par rapport à un processus d'Itô est encore un processus d'Itô.*

Remarque 3.5 *Si* X *est de la forme* (3.5) *alors* X *est une martingale si* $\gamma \equiv 0$*, c.f. Proposition 2.5. On peut montrer que la réciproque est vraie :* X *est une martingale seulement si* $\gamma \equiv 0$.

Terminologie 3.6 (Variation quadratique) *Soit X un processus d'Itô de la forme* (3.5)*. On appelle variation quadratique de X le processus $(\langle X\rangle_t)_{t\le T}$ défini par*

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds.$$

Remarque 3.7 *On peut montrer que $\langle X\rangle_t$ est la limite (en probabilité) quand $n\to\infty$ de*

$$V_t^n := \sum_{k=1}^n |X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}|^2$$

où $t_k^n = tk/n$ pour $0\le k\le n$. Une manière simple de comprendre ce résultat est de considérer le cas où γ est déterministe et borné par une constante $C>0$. Comme

$$|X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}|^2 \quad = \quad |\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \gamma_s ds|^2 + 2\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \gamma_s ds \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \alpha_s dW_s + |\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \alpha_s dW_s|^2,$$

on obtient en moyenne (cf. Proposition 2.5)

$$\mathbb{E}[|X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}|^2] \quad = \quad O_k(n^{-2}) + 0 + \mathbb{E}[\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \alpha_s^2 ds],$$

où $O_k(n^{-2})$ est un terme borné par C^2n^{-2}. En sommant de chaque côté, on obtient

$$\mathbb{E}[V_t^n] \quad = \quad \sum_{k=1}^n O_k(n^{-2}) + \mathbb{E}[\int_0^t \alpha_s^2 ds],$$

avec $|\sum_{k=1}^n O_k(n^{-2})| \le C^2nn^{-2} = C^2n^{-1} \to 0$ quand $n\to\infty$. Ceci montre la convergence des moyennes. Il faut un peu plus travailler pour obtenir la convergence en probabilité mais la preuve repose sur le même type d'argument : le carré d'un terme en dt est de l'ordre de $(dt)^2$ alors que le carré d'un terme en dW_t est de l'ordre de dt. En sommant les variations quadratiques, la partie en dt donne des termes de l'ordre de $nn^{-2} = n^{-1}$ qui est petit et disparaît à la limite, alors que la partie en dW_t donne du $nn^{-1} = 1$ qui reste.

Excercice 3.8 *Soit X un processus d'Itô de la forme* (3.5)*. Montrer les assertions suivantes :*

1. $\mathbb{E}[X_t^2] = X_0^2 + \mathbb{E}[\langle X\rangle_t]$ *si* $\gamma\equiv 0$.
2. $\langle X\rangle \equiv 0$ *si* $\alpha\equiv 0$.

3. $\langle X \rangle = \sigma^2 \langle W \rangle$ *si* α *est constant réelle* σ.

4. *Si* X *est une martingale et* $\langle X \rangle_t = t$ *pour tout* t, *alors* $X = W$.

On peut maintenant énoncer le fameux lemme d'Itô, qui s'applique à la classe de fonctions suivante.

Terminologie 3.9 (Classe $C^{1,2}$) *On dit qu'une fonction* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto f(t, x)$ *appartient à la classe* $C^{1,2}$ *si*

(i) *elle est continue sur* $[0, T] \times \mathbb{R}$,

(ii) *elle est une fois dérivable par rapport à* t *et deux fois par rapport à* x *sur* $[0, T[\times\mathbb{R}$,

(iii) *les dérivées correspondantes sont continues sur* $[0, T[\times\mathbb{R}$.

On note f_t *la dérivée en temps et* f_x, f_{xx} *les dérivées première et seconde en* x.

Lemme 3.10 (d'Itô) *Soit* $f \in C^{1,2}$, X *un processus d'Itô de la forme* (3.5). *Alors, le processus* Y *défini par* $Y_t = f(t, X_t)$ *pour tout* $t \leq T$ *a pour dynamique*

$$\begin{aligned} dY_t &= f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + +\frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)d\langle X \rangle_t \\ &= \left(f_t(t, X_t) + f_x(t, X_t)\gamma_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\alpha_t^2 \right) dt + f_x(t, X_t)\alpha_t dW_t. \end{aligned}$$

Intuition de la preuve. Pour comprendre ce résultat, on peut commencer par opérer un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps et 2 en espace sur la fonction f au point (t, X_t) pour obtenir pour $h > 0$

$$\begin{aligned} Y_{t+h} - Y_t &= f(t + h, X_{t+h}) - f(t, X_t) \\ &= f_t(t, X_t)h + O(h^2) \\ &\quad + f_x(t, X_t)(X_{t+h} - X_t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)|X_{t+h} - X_t|^2 \\ &\quad + O(|X_{t+h} - X_t|^3) \end{aligned}$$

où $O(y)$ désigne une quantité qui tends vers 0 si y tend vers 0 (notations de Landau). Supposons pour simplifier que γ et α sont déterministes. Alors, $O(|X_{t+h} - X_t|^3)$ est de l'ordre du cube d'une loi normale d'espérance et variance de l'ordre de $O(h)$, cf. Proposition 2.5. C'est de l'ordre de $O(h^2)$, cf. Exercice 3.12 ci-dessous. Le terme $|X_{t+h} - X_t|^2$ est de l'ordre de $\int_t^{t+h} \alpha_s^2 ds$ d'après la Remarque 3.7. Quand $h \to 0$, on obtient donc

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)\alpha_t^2 dt.$$

□

Excercice 3.11 *Soit X un processus d'Itô. Montrer que $X^2 - \langle X \rangle$ est une martingale si X est une martingale.*

Excercice 3.12 *Soient $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $p \geq 2$. On note f la densité de la loi $\mathcal{N}(b,a)$ et f' sa dérivée.*

1. *Montrer que*

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^p f(x)dx &= -a\int_0^\infty x^{p-1}\left(-(x-b)/a\right)f(x)dx + b\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx \\
&= -a\int_0^\infty x^{p-1}f'(x)dx + b\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx \\
&= -a[x^{p-1}f(x)]_0^\infty + a(p-1)\int_0^\infty x^{p-2}f(x)dx \\
&+ b\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx \\
&= a(p-1)\int_0^\infty x^{p-2}f(x)dx + b\int_0^\infty x^{p-1}f(x)dx
\end{aligned}$$

2. *Etablir un résultat similaire pour $\int_{-\infty}^0 x^p f(x)dx$.*
3. *En déduire que si $X \sim \mathcal{N}(b,a)$ alors*

$$\mathbb{E}[X^p] = a(p-1)\mathbb{E}[X^{p-2}] + b\mathbb{E}[X^{p-1}].$$

4. *En déduire que $\mathbb{E}[X^3] = 3ab + b^3$.*

3.2 Application : dynamique du prix, processus de portefeuille et couverture en delta dans le modèle de Black et Scholes

Comme première application de ce résultat, nous pouvons donner la dynamique du processus de prix dans le modèle de Black et Scholes. Dans toute cette section, le processus S est défini comme dans (1.1).

Excercice 3.13 (Dynamique de Black et Scholes) *On pose $\theta = \mu - \sigma^2/2$ avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.*

1. *Montrer que la fonction définie par $f(t,x) = S_0 e^{\theta t + \sigma x}$ vérifie $f_t = \theta f$, $f_x = \sigma f$ et $f_{xx} = \sigma^2 f$.*

2. *En déduire que la dynamique de S est*

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t.$$

3. *Soit v une fonction $C^{1,2}$. Donner la dynamique de $(v(t, S_t))_{t \leq T}$.*

4. *Soit $r \in \mathbb{R}$. Donner la dynamique de $(e^{-rt} S_t)_{t \leq T}$.*

Ceci rend possible la définition du processus de portefeuille. On suppose ici que le taux sans risque est une constante r.

Terminologie 3.14 (Processus de portefeuille) *On appelle stratégie financière un processus ϕ qui est S-intégrable, $\phi \in \mathcal{L}(S)$. A un tel processus, et étant donnée une richesse initiale x, on associe le processus de portefeuille $V^{x,\phi}$ défini par*

$$V_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_s dS_s + \int_0^t r(V_s^{x,\phi} - \phi_s S_s) ds. \tag{3.7}$$

Il y a plusieurs choses à dire sur cette équation :

(i) Tout d'abord, c'est l'analogue de l'équation (2.4) du Chapitre 1 obtenue en temps discret :

$$dV_t^{x,\phi} = \phi_t dS_t + r(V_t^{x,\phi} - \phi_t S_t) dt.$$

Moralement, cela correspond à un pas de temps infinitésimal.

(ii) Le taux r s'interprète ici comme le taux correspondant à une période de temps infinitésimal dt. Cela signifie que placer 1€ en t rapport $(1 + rdt)$ € en $t + dt$. Si on replace son argent continument entre 0 et t, avec une mise initiale de 1€, le montant détenu M évolue selon la dynamique $dM_t = M_t r dt$, i.e. $M_{t+dt} = M_t(1 + rdt)$, dont la solution est e^{rt}. Autrement dit, c'est un taux à composition continue.

(iii) $V^{x,\phi}$ apparaît des deux côtés de l'équation (3.7). C'est ce que l'on appelle une équation différentielle stochastique. Il n'est pas claire qu'elle ait une solution. C'est l'object de l'exercice qui suit.

Excercice 3.15 (Processus de portefeuille actualisé) *Soit $\phi \in \mathcal{L}(S)$. On pose $\beta_t := e^{-rt}$ et $\tilde{S} = \beta S$. On rappelle que sa dynamique a été calculée dans l'Exercice 3.13.*

1. *Montrer que* $\phi \in \mathcal{L}(\tilde{S})$.
2. *Soit* Y *défini par* $Y_t = x + \int_0^t \phi_s d\tilde{S}_s$. *Donner la dynamique de* Y/β *et montrer qu'elle coïncide avec* (3.7).
3. *Calculer la dynamique de* $\tilde{V}^{x,\phi} = \beta V^{x,\phi}$ *et comparer à celle de* Y.
4. *Que peut-on en déduire ?*

Remarque 3.16 *L'exercice précédent montre que la dynamique du processus de portefeuille actualisé* $\tilde{V}^{x,\phi}$ *est*

$$\tilde{V}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_s d\tilde{S}_s. \tag{3.8}$$

C'est l'analogue en temps continu de l'équation (2.5) *du Chapitre 1.*

Avec le travail déjà réalisé, on peut commencer à parler de couverture d'option.

Excercice 3.17 (Couverture en delta : option vanille) *Soit* g *une fonction sur* $\mathbb{R}$ *(à croissance linéaire*[8]*) et* v *une fonction* $C^{1,2}$ *telle que* $v(T, x) = g(x)$ *pour tout* $x > 0$. *On suppose en outre que ses dérivées vérifient*

$$v_t(t, x) + rxv_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) = rv(t, x) \tag{3.9}$$

pour tout $(t, x) \in [0, T[\times(0, \infty)$. *On suppose que* $\phi := (v_x(t, S_t))_{t \le T} \in \mathcal{L}(S)$. *Déduire du Lemme d'Itô la dynamique de* $(\beta_t v(t, S_t))_{t \le T}$ *et montrer que*

$$v(0, S_0) + \int_0^T \phi_s d\tilde{S}_s = \beta_T g(S_T).$$

Que peut-on en déduire en terme de couverture de l'option de payoff $g(S_T)$ *?*

L'exercice précédent montre qu'en partant de $p = v(0, S_0)$ et en suivant la stratégie ϕ, la valeur terminale du portefeuille est $V_T^{p,\phi} = g(S_T)$. Autrement dit, on peut se couvrir parfaitement contre la vente de l'option $g(S_T)$ en la vendant au prix $v(0, S_0)$ et en suivant la stratégie ϕ. La fonction v donne donc l'unique prix possible pour cette option, dans un marché compétitif. On parle de delta-hedging, le delta étant la dérivée du prix de l'option par rapport à la valeur du sous-jacent, ici $v_x(t, S_t)$) à l'instant t.

Pour comprendre d'où vient cette équation nous pouvons faire le raisonnement suivant :

8. i.e. il existe une constante $C > 0$ telle que $|g(x)| \le C(1 + |x|)$.

(a.) Le prix à la date t permettant de se couvrir à partir de la date t ne peut dépendre que de t et S_t, puisque ce qui se passe après t est indépendant de ce qui s'est passé avant, c.f. Définition 1.1. C'est donc de la forme $v(t, S_t)$ où v est une fonction déterministe.

(b.) Si on veut se couvrir parfaitement, l'idéal serait que le portefeuille de couverture soit toujours égale à la valeur permettant de continuer à se couvrir (si on passait au dessus, ce serait encore mieux, mais ça n'arrive malheureusement pas - au moins en théorie).

(c.) On cherche donc (p, ϕ) tels que $V_t^{p,\phi} = v(t, S_t)$ pour tout $t \leq T$.

(d.) En appliquant le lemme d'Itô et en comparant les dynamiques [9] de $V^{p,\phi}$ et $(v(t, S_t))_{t \leq T}$, on obtient (3.9) et $\phi_t = v_x(t, S_t)$.

(e.) Enfin, la plus petite richesse permettant de se couvrir en partant de T est $g(S_T)$, on doit donc avoir $v(T, x) = g(x)$ pour tout $x > 0$ (car on ne sait pas ce que vaudra S_T).

L'équation (3.9) est l'équation de Black-Scholes, c'est aussi l'équation de la chaleur pour les physiciens. C'est ce que l'on appelle une équations aux dérivées partielles (car c'est de fait une équation sur les dérivées partielles de v).

L'exercice suivant donne l'erreur de couverture commise en cas de mauvaise spécification de la volatilité.

Excercice 3.18 (Formule de la tracking error) *On se place dans le cadre de l'Exercice 3.17. La fonction v est calculée en utilisant l'équation* (3.9) *mais la vraie dynamique de S est donnée par* (1.1) *avec σ_0 au lieu de σ. On considère le portefeuille de couverture V suivant $\phi = (v_x(t, S_t))_{t \leq T}$ et issu de $v(0, S_0)$. On note $\tilde{V}$ sa valeur actualisée. Montrer que*

$$\tilde{V}_T - \beta_T g(S_T) = \frac{1}{2} \int_0^T \beta_t (\sigma^2 - \sigma_0^2) S_t^2 v_{xx}(t, S_t) dt.$$

Que peut-on en déduire ?

On peut noter que, en cas de mauvaise spécification de la volatilité, l'erreur de couverture est d'autant plus importante que le gamma de l'option, $v_{xx}(t, S_t)$, est grand.
On peut étendre le raisonnement précédent à une large classe d'options.

9. Deux processus d'Itô ne peuvent être égaux que si les termes en dt coïncident ainsi que les termes en dW_t.

Excercice 3.19 (Couverture en delta : option barriere) *Soit g une fonction sur $\mathbb{R}$ (à croissance linéaire), $B > 0$ et v une fonction $C^{1,2}$ telle que $v(t,x) = 0$ pour tout $(t,x) \in [0,T] \times [B,\infty)$ et $v(T,x) = g(x)$ pour tout $x \in (0,B)$. On suppose en outre que ses dérivées vérifient*

$$v_t(t,x) + rxv_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) = rv(t,x)$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times(0,B)$. On note $S_t^* := \max_{0\le s\le t} S_s$. On suppose que $\phi := (v_x(t,S_t)\mathbf{1}_{S_t^*<B})_{t\le T} \in \mathcal{L}(S)$. Déduire du Lemme d'Itô la dynamique de $(\beta_t v(t,S_t))_{t\le T}$ et montrer que

$$v(0,S_0) + \int_0^T \phi_s d\tilde{S}_s = \beta_T g(S_T)\mathbf{1}_{\{S_T^*<B\}}.$$

Que peut-on en déduire en terme de couverture d'option ?

Excercice 3.20 (Couverture en delta : option américaine) *Soit g une fonction sur $\mathbb{R}$ (à croissance linéaire), v une fonction[10] $C^{1,2}$ telle $v(T,x) = g(x)$ pour tout $x \in (0,\infty)$. On suppose en outre que*

$$\min\left\{rv(t,x) - v_t(t,x) - rxv_x(t,x) - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x)\ ,\ v(t,x) - g(x)\right\} = 0$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times(0,\infty)$. On note

$$\hat{\tau} := \min\{t \ge 0 : v(t,S_t) = g(S_t)\}.$$

On suppose que $\phi := (v_x(t,S_t)\mathbf{1}_{\{t\le\hat{\tau}\}})_{t\le T} \in \mathcal{L}(S)$. Déduire du Lemme d'Itô la dynamique de $(\beta_t v(t,S_t))_{t\le T}$ et montrer que

$$v(0,S_0) + \int_0^\tau \phi_s d\tilde{S}_s \ge \beta_\tau g(S_\tau)$$

pour tout temps d'arrêt[11] τ tel que $\tau \le \hat{\tau}$, et que

$$v(0,S_0) + \int_0^{\hat{\tau}} \phi_s d\tilde{S}_s = \beta_{\hat{\tau}} g(S_{\hat{\tau}}).$$

Que peut-on en déduire en terme de couverture d'option ?

10. Il est peut réaliste de la supposer $C^{1,2}$ mais il suffit en fait que les dérivées soient bien définies et continues sur l'ensemble où $v > g$.

11. Comme en temps discret, il s'agit d'une variable aléatoire telle que $\{\tau \le t\}$ est connu en t, quel que soit t.

4 Théorème de Girsanov

On a vu à travers l'Exercice 3.17 comment construire à la main un portefeuille de couverture à partir de la résolution d'une équation. On peut voir cette équation comme une version en temps continu de l'algorithme (2.6) du Chapitre 1. Dans l'Exercice 2.11 du même chapitre, on avait donné une interprétation du prix ainsi obtenu comme espérance du payoff actualisé sous la mesure risque neutre.
L'object de cette section est de montrer comment construire la mesure risque neutre dans un modèle en temps continu et d'étendre à ce cadre la représentation probabiliste de l'Exercice 2.11 du Chapitre 1.

4.1 Changement de mesure

On rappelle que dans la Définition 1.1 le mouvement brownien est défini par rapport à une mesure de probabilité $\mathbb{P}$. Le théorème suivant montre comme modifier W pour que le nouveau processus reste un mouvement brownien mais sous une autre mesure de probabilité.
On commence par expliquer comment définir une nouvelle mesure à partir de $\mathbb{P}$.

Proposition 4.1 (Changement de mesure) *Soit H une variable aléatoire telle que $H > 0$ $\mathbb{P}-$p.s. et telle que $\mathbb{E}[H] = 1$. On définit $\mathbb{Q}$ par*

$$\mathbb{Q}[A] = \mathbb{E}[H\mathbf{1}_A].$$

Alors $\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité et de plus elle est équivalent à $\mathbb{P}$ au sens où $\mathbb{Q}[A] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}[A] = 0$ pour tout évènement A.

Preuve. On commence par vérifier que c'est une mesure de probabilité. On a $\mathbb{Q}[\Omega] = \mathbb{E}[H\mathbf{1}_\Omega] = \mathbb{E}[H] = 1$ par hypothèse, et $\mathbb{Q}[A] \geq 0$ puisque $H \geq 0$. Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'évènements disjoints alors

$$\sum_n \mathbb{Q}[A_n] = \sum_n \mathbb{E}[H\mathbf{1}_{A_n}] = \mathbb{E}[H\sum_n \mathbf{1}_{A_n}] = \mathbb{E}[H\mathbf{1}_{\cup_n A_n}] = \mathbb{Q}[\cup_n A_n],$$

par convergence monotone [12]. Reste à montrer qu'elle est équivalente à $\mathbb{P}$ mais c'est une conséquence du fait que $H > 0$ $\mathbb{P}-$p.s. : $\mathbb{E}[H\mathbf{1}_A] = 0 \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = 0$ $\mathbb{P}-$p.s. $\Leftrightarrow \mathbb{P}[A] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = 0$. □

12. Si X_n converge $\mathbb{P}-$p.s. en croissant vers X et si $X_1 \geq 0$, alors $\mathbb{E}[X_n]$ converge en croissant vers $\mathbb{E}[X]$.

Remarque 4.2 (Densité) *Si ξ est une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|\xi|] < \infty$ alors*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi] = \mathbb{E}[H\xi].$$

On dit que H est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et on note $H = d\mathbb{Q}/d\mathbb{P}$. Ceci vient du calcul formel

$$\int_\Omega \xi(\omega)\frac{d\mathbb{Q}(\omega)}{d\mathbb{P}(\omega)}d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)d\mathbb{Q}(\omega) = \int_\Omega \xi(\omega)H(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$$

Excercice 4.3 *On suppose que H est la densité de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$ et que $H > 0$ $\mathbb{P} -$ p.s. Quelle est la densité de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$? Que vaut son espérance sous $\mathbb{Q}$?*

Théorème 4.4 (de Girsanov) *Soit $\alpha \in \mathcal{L}(W)$ et*

$$H := e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \alpha_s^2 ds + \int_0^T \alpha_s dW_s}.$$

On suppose que $\mathbb{E}[H] = 1$. Alors le processus $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^t \alpha_s ds$$

est un mouvement brownien pour la mesure $\mathbb{Q}$ de densité H par rapport à $\mathbb{P}$.

Intuition de preuve. Supposons pour simplifier que α est égal à une constante [13] λ et vérifions simplement que $\xi := W_{t+h}^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}$ suit une loi normale sous $\mathbb{Q}$ de moyenne 0 et de variance h, pour $t \leq T - h$ et $h > 0$. Pour le montrer, il suffit de vérifier que pour tout fonction g (bornée) on a

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(\xi)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f_h(x)ds$$

où f_h est la densité de la loi $\mathcal{N}(0, h)$. Or,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(\xi)] = \mathbb{E}[Hg(\xi)] = \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T + \lambda W_T} g(W_{t+h} - W_t - \lambda h)]$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 T + \lambda W_T}|\mathcal{F}_{t+h}] &= e^{-\frac{1}{2}\lambda^2(t+h) + \lambda W_{t+h}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 h + \lambda(W_{t+h} - W_t)} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t + \lambda W_t}\end{aligned}$$

13. Cette version est appelée Théorème de Cameron-Martin.

où $e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 t+\lambda W_t}$ est de moyenne 1 et est indépendant de $(W_{t+h}-W_t)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[g(\xi)] &= \mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 h+\lambda(W_{t+h}-W_t)}g(W_{t+h}-W_t-\lambda h)] \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\lambda^2 h+\lambda x}g(x-\lambda h)f_h(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{+\frac{1}{2}\lambda^2 h+\lambda y}g(y)f_h(y+\lambda h)dy
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $y = x - \lambda h$. On observe pour conclure que

$$e^{+\frac{1}{2}\lambda^2 h+\lambda y}f_h(y+\lambda h) = f_h(y).$$

La propriété d'indépendance des accroissements se vérifie par le même type d'arguments. Le fait que les trajectoires de $W^{\mathbb{Q}}$ sont continues et issues de 0 vient du fait que ceci est vrai pour W. $\square$

4.2 Application : mesure risque neutre dans le modèle de Black et Scholes

Il est maintenant facile de construire la mesure risque neutre pour le modèle (1.1). Posons

$$H := e^{-\frac{1}{2}\frac{(r-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{r-\mu}{\sigma}W_T}.$$

Alors $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma}t$$

est un mouvement brownien sous la mesure $\mathbb{Q}$ de densité H par rapport à $\mathbb{P}$. On peut ré-écrire (1.1) sous la forme

$$S_t = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t^{\mathbb{Q}}} \tag{4.10}$$

de sorte que

$$\tilde{S}_t = S_0 e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma W_t^{\mathbb{Q}}}, \tag{4.11}$$

ou encore, cf. Exercice 3.13,

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}. \tag{4.12}$$

Il suffit de se rappeler de la loi des accroissements d'un mouvement brownien pour vérifier que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t|\mathcal{F}_s] = \tilde{S}_s,\ s \le t \le T.$$

Conclusion 4.5 (Mesure risque neutre) *Le processus de prix actualisé est une martingale sous la mesure $\mathbb{Q}$. On appelle $\mathbb{Q}$ la mesure risque neutre ou mesure martingale.*

On peut ensuite calculer la dynamique du processus de portefeuille en fonction de $W^{\mathbb{Q}}$. Il suffit d'utiliser (3.8) et (4.12) :

$$\tilde{V}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_s \sigma \tilde{S}_s dW_s^{\mathbb{Q}}. \tag{4.13}$$

On en déduit alors que $\tilde{V}^{x,\phi}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, c.f. Proposition 2.5. Combiné à l'Exercice 3.17, ceci fournit une représentation probabiliste du prix de couverture de l'option.

Conclusion 4.6 (Prix de l'option) *Sous les conditions de l'Exercice 3.17, le prix de couverture de l'option de payoff $g(S_T)$ est donné par la formule*

$$v(0, S_0) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T g(S_T)]. \tag{4.14}$$

Excercice 4.7 (Call dans le modèle de Black-Scholes) *On considère une call de strike $K = 100$ et maturité $T = 1$. On considère le modèle de Black-Scholes avec $S_0 = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.02$.*

1. *Déduire de* (4.10) *et de l'Exercice 1.7 le prix du call $v(t, S_t)$ à la date t.*
2. *Calculer le nombre de titres ϕ_t à détenir en t pour pouvoir se couvrir, selon les valeurs de S_t.*
3. *Avec excel, générer $J = 500$ trajectoires $(W^j, S^j)_{j \le J}$ indépendantes en temps discrets de W et S en suivant l'énoncé de l'Exercice 1.6.*
4. *Considérer le portefeuille de couverture consistant à détenir un nombre de titres ϕ_{t_i} sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1})$. Utiliser les simulations de S pour obtenir des simulations $(V_T^j)_{j \le T}$ de la valeur terminale du portefeuille ainsi créé en partant de $v(0, S_0)$.*
5. *Faire un histogramme des différences $V_T^j - [S_T^j - K]^+$.*
6. *Comment se comporte-t-il quand le pas de temps n devient grand ?*
7. *Reprendre les questions précédentes mais en supposant maintenant que chaque transaction effectuée sur le marché est soumise à un coût de transaction proportionnel au montant échangé de 0.01%, 0.1% puis 1%.*

Excercice 4.8 (Option digitale) *Reprendre les questions de l'Exercice 4.7 pour une option digitale de payoff* $\mathbf{1}_{S_T \geq 100}$ *en* $T = 1$. *Comment se comporte le delta de l'option près de la maturité ?*

Excercice 4.9 (Coefficients dépendant du temps) *On considère le modèle de Black et Scholes mais avec des coefficients dépendant du temps :*

$$S_t = S_0 e^{\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2) ds + \int_0^t \sigma_s dW_s}, \quad t \leq T,$$

où $t \mapsto (\mu_t, \sigma_t, r_t)$ *déterministe et bornée,* r *étant le taux sans risque. Donner l'expression de la densité de la mesure risque neutre* $\mathbb{Q}$ *associée et du mouvement brownien* $W^{\mathbb{Q}}$ *correspondant.*

Excercice 4.10 (Erreur de modèle pour un call) *On se place dans le cadre de l'Exercice 3.18 avec* $g(x) = [x - K]^+$. *En utilisant* (4.14), *montrer que* $x \mapsto v(t, x)$ *est convexe pour tout* $t \leq T$ [14]. *On rappelle que la dérivée seconde d'une fonction convexe est positive. En terme d'erreur de couverture, vaut-il mieux sur-estimer ou sous-estimer la volatilité dans l'équation d'évaluation* (3.9) *?*

5 Théorème de représentation et couverture d'options quelconques

On a vu dans la Section 3.2 comment construire un portefeuille de couverture à partir de la résolution d'une équation. Puis on en a donnée une représentation sous forme d'espérance sous la mesure risque neutre dans la Section 4.2. Le théorème suivant fournit un outils puissant permettant d'obtenir la formulation du prix contenue dans (4.14) directement.
A partir de maintenant, on définit $\mathcal{L}(X, \mathbb{Q})$ comme $\mathcal{L}(X)$ mais en remplaçant $\mathbb{P}$ par $\mathbb{Q}$.

Théorème 5.1 (de représentation) *Soit* $\mathbb{Q}$ *une mesure de probabilité définie comme dans le Théorème 4.4. Soit* ξ *une variable aléatoire telle que* $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi^2] < \infty$. *Alors, il existe* $\psi \in \mathcal{L}(W^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ *tel que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi] + \int_0^T \psi_s dW_s^{\mathbb{Q}} = \xi.$$

14. $x \mapsto f(x)$ est convexe si pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$ on a $\lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1 - \lambda y))$.

L'application à la couverture des options européennes est immédiate. On se place ici dans le modèle de Black et Scholes.

Corollaire 5.2 *Soit $(S, \mathbb{Q})$ défini comme dans la Section 4.2. Soit un payoff d'option G tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G^2] < \infty$. Alors, il existe $\phi \in \mathcal{L}(S, \mathbb{Q})$ tel que $V_T^{p_0,\phi} = G$ avec $p_0 := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$.*

Preuve. En applicant le Théorème de représentation à $\beta_T G$, on trouve $\psi \in \mathcal{L}(W^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ tel que $p_0 + \int_0^T \psi_s dW_s^{\mathbb{Q}} = \beta_T G$. En faisant le changement de variable $\phi = \psi/(\sigma\tilde{S})$ et en utilisant (4.12), on obtient $p_0 + \int_0^T \phi_s d\tilde{S}_s = \beta_T G$. On conclut avec (3.8) que $\tilde{V}_T^{p_0,\phi} = \beta_T G$, ce qui revient à dire que $V_T^{p_0,\phi} = G$. $\square$

Ce résultat est très général, et n'est pas propre au modèle de Black-Scholes.

Conclusion 5.3 *Si on s'autorise à utiliser des stratégies dans l'espace $\mathcal{L}(S, \mathbb{Q})$ (ce qui est vraiment de peu d'importance en pratique), le seul prix possible pour une option de payoff G en T est $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$ où $\mathbb{Q}$ est la mesure qui rend martingales le processus de prix actualisé.*

Remarque 5.4 *Le résultat précédent s'étend au calcul du prix en t, il est donné par $p_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G|\mathcal{F}_t]/\beta_t$. Il en résulte que $(\beta_t p_t)_{t \le T}$ est également une martingale sous $\mathbb{Q}$, c.f. Exercice 2.10 du Chapitre 1.*

Les choses sont un peu plus délicates en ce qui concerne les options américaines. Disons simplement que le résultat obtenu en temps discret dans la Section 2.3 du Chapitre 1 reste valable. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêts à valeur dans $[0, T]$.

Corollaire 5.5 *Soit $(S, \mathbb{Q})$ défini comme dans la Section 4.2. Soit un payoff d'option américaine modélisé par un processus adapté[15] $(G_t)_{t \le T}$ borné. Alors, il existe $\phi \in \mathcal{L}(S, \mathbb{Q})$ tel que $V_t^{p_0,\phi} \ge G_t$ pour tout $t \le T$ en partant de*

$$p_0 := \sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_\tau G_\tau].$$

De plus

$$p_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_{\hat{\tau}} G_{\hat{\tau}}] \quad \text{avec} \quad \hat{\tau} := \min\{t \ge 0 : V_t^{p_0,\phi} = G_t\}.$$

15. i.e. tel que G_t est connu en t, pour tout $t \le T$.

Remarque 5.6 *On peut montrer, comme en temps discret, que le prix p_0 défini ci-dessus pour l'option américaine de payoff $(G_t)_{t\leq T}$ est le seul viable sur un marché compétitif (mêmes arguments qu'en temps discret mais avec des outils techniques plus élaborés). De même, un acheteur a tout intérêt à exercer son option exactement au temps d'arrêt $\hat{\tau}$. Ceci doit être mis en perspective avec les résultats de l'Exercice 3.20.*

6 Extensions multivariées

Nous avons pour le moment restreint notre analyse au cas d'un seul actif risqué et un seul mouvement brownien. L'extension multivariée ne requière aucune nouvelle idée.

6.1 Processus multivariés

On commence par définir le mouvement brownien de dimension m.

Définition 6.1 *Le processus*

$$W = \begin{pmatrix} W^1 \\ \dots \\ W^m \end{pmatrix}$$

est un mouvement brownien de dimension m si chaque W^i est un mouvement brownien indépendant de tous les autres.

Excercice 6.2 *On suppose que $m = 2$. Soit $\rho \in [0, 1]$. Montrer que $\rho W^1 + (1 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} W^2$ est un mouvement brownien de dimension 1.*

La filtration $\mathbb{F}$ est maintenant celle engendrée par le mouvement brownien de dimension m.

On étend ensuite la définition de $\mathcal{A}$ à l'ensemble $\mathcal{A}^m$ des processus $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^m)$ tels que chaque ϕ^i est admissible. On définit l'intégrable stochastique de manière naturelle :

$$\int_0^t \phi_s dW_s := \sum_{i=1}^m \int_0^t \phi_s^i dW_s^i.$$

Un processus d'Itô (de dimension 1) est alors de la forme

$$X_t = x + \int_0^t \gamma_s ds + \int_0^t \alpha_s dW_s = x + \int_0^t \gamma_s ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_s^j dW_s^j.$$

On dit que

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ \dots \\ X^d \end{pmatrix}$$

est un processus d'Itô de dimension d si chaque composant X^i est un processus d'Itô. Dans ce cas, on associe à chaque X^i ses coefficients γ^i et $\alpha^i = (\alpha^{i1}, \dots, \alpha^{im})$ de sorte que

$$X_t^i = x^i + \int_0^t \gamma_s^i ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_s^{ij} dW_s^j.$$

On peut ensuite regrouper tous les x^i dans un vecteur x, les γ^i dans un vecteur γ et les α^i dans une matrice α :

$$\gamma := \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \dots \\ \gamma^d \end{pmatrix} \text{ et } \alpha := \begin{pmatrix} \alpha^{11} & \cdots & \alpha^{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{d1} & \cdots & \alpha^{dm} \end{pmatrix},$$

afin d'utiliser l'écriture vectorielle

$$X_t = x + \int_0^t \gamma_s ds + \int_0^t \alpha_s dW_s \tag{6.15}$$

qui se lit

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \dots \\ X_t^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} \gamma_s^1 \\ \dots \\ \gamma_s^d \end{pmatrix} ds + \int_0^t \begin{pmatrix} \alpha_s^{11} & \dots & \alpha_s^{1d} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_s^{d1} & \dots & \alpha_s^{dd} \end{pmatrix} d \begin{pmatrix} W_s^1 \\ \dots \\ W_s^m \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} X_t^1 \\ \dots \\ X_t^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int_0^t \gamma_s^1 ds \\ \dots \\ \int_0^t \gamma_s^d ds \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_s^{1j} dW_s^j \\ \dots \\ \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_s^{dj} dW_s^j \end{pmatrix}.$$

Si $\phi = (\phi^1, \cdots, \phi^d)$ est un processus tel que chaque $\phi \in \mathcal{L}(X^i)$, on définit l'intégrale

$$\int_0^t \phi_s dX_s := \sum_{i=1}^d \phi_s^i dX_s^i = (\phi_s^1, \cdots, \phi_s^d) d \begin{pmatrix} X_s^1 \\ \dots \\ X_s^d \end{pmatrix},$$

et on dit que $\phi \in \mathcal{L}(X)$. Si $\mathbb{Q}$ est une mesure différente de $\mathbb{P}$, on définit de manière similaire $\mathcal{L}(X, \mathbb{Q})$ comme l'ensemble des processus tels que chaque composante numéro i est dans $\mathcal{L}(X^i, \mathbb{Q})$.
Si X et $\bar{X}$ sont deux processus d'Itô de dimension 1 associés à (γ, α) et $(\bar{\gamma}, \bar{\alpha})$, on peut définir leur co-variation quadratique :

$$\langle X, \bar{X} \rangle_t := \sum_{j=1}^{m} \int_0^t \alpha_s^j \bar{\alpha}_s^j ds,$$

qui correspond à la limite en probabilité des co-variations

$$V_t^n := \sum_{k=1}^{n} (X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n})(\bar{X}_{t_k^n} - \bar{X}_{t_{k-1}^n}),$$

c.f. Remarque 3.7.
C'est en particulier une extension naturelle de la variation quadratique au sens où

$$\langle X, X \rangle = \langle X \rangle.$$

Excercice 6.3 *Soit X un processus d'Itô de la forme* (6.15). *Montrer que :*

1. $\langle X^{i_1}, X^{i_2} \rangle_t = \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_s^{i_1 j} \alpha_s^{i_2 j} ds.$
2. $\langle X^{i_1} + X^{i_2} \rangle_t = \langle X^{i_1} \rangle_t + \langle X^{i_2} \rangle_t + 2\langle X^{i_1}, X^{i_2} \rangle_t.$
3. *si* $\phi \in \mathcal{L}(X)$ *et* $Y_t = \int_0^t \phi_s dX_s$ *alors* $d\langle Y \rangle_t = \sum_{i_1, i_2 = 1}^d \phi_t^{i_1} \phi_t^{i_2} d\langle X^{i_1}, X^{i_2} \rangle_t.$

Remarque 6.4 (Caractérisation de Paul Lévy) *De manière générale, on peut montrer qu'un processus d'Itô de la forme* (6.15) *avec $\gamma \equiv 0$ et tel que $\langle X^i, X^j \rangle_t = t\mathbf{1}_{i=j}$, pour tout t et $i, j \leq d$, est un mouvement brownien (de dimension d). Ceci étend le résultat de l'Exercice 6.2.*

6.2 Versions multivariées des théorèmes principaux

En ce qui concerne le lemme d'Itô, on peut suivre le même raisonnement qu'en dimension 1 en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 en temps et 2 par rapport aux variables d'espace. Si f est $C^{1,2}(\mathbb{R}^d)$, i.e. continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, 1 fois dérivable en temps et deux fois en espace (à dérivées continues) sur $[0, T[\times \mathbb{R}^d$.

Lemme 6.5 (d'Itô) *Si $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^d)$ et X est un processus d'Itô de la forme* (6.15), *alors*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x^i}(s, X_s) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^d f_{x^{i_1} x^{i_2}}(s, X_s) d\langle X^{i_1}, X^{i_2} \rangle_s, \end{aligned}$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \int_0^t f_t(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t f_{x^i}(s, X_s) dX_s^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i_1, i_2 = 1}^d f_{x^{i_1} x^{i_2}}(s, X_s) \left(\sum_{j=1}^m \alpha_s^{i_1 j} \alpha_s^{i_2 j} \right) ds. \end{aligned}$$

Reste à étendre le théorème de Girsanov. Ceci peut se faire un opérant le changement de mesure pour chaque composante du mouvement brownien indépendamment. L'écriture générale est la suivante. Si $x \in \mathbb{R}^m$, on note

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^m (x^j)^2}$$

sa norme (euclidienne).

Théorème 6.6 (de Girsanov) *Soit $\alpha \in \mathcal{L}(W)$ et*

$$H := e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \|\alpha_s\|^2 ds + \int_0^T \alpha_s dW_s}.$$

On suppose que $\mathbb{E}[H] = 1$. Alors le processus $W^{\mathbb{Q}}$ défini par

$$W_t^{\mathbb{Q}, j} = W_t^j - \int_0^t \alpha_s^j ds, \ j = 1, \ldots, m,$$

est un mouvement brownien de dimension m pour la mesure $\mathbb{Q}$ de densité H par rapport à $\mathbb{P}$.

Excercice 6.7 *On se place dans le contexte du Théorème 6.6.*

1. *Montrer que W^1 est encore un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\alpha^1 \equiv 0$.*

2. *On suppose $m = 2$. On commence par définir la mesure $\mathbb{Q}^1$ en prenant un processus α de la forme $(\alpha^1, 0)$ pour définir sa densité par rapport à $\mathbb{P}$. Puis on définit la mesure $\mathbb{Q}^2$ en prenant un processus α de la forme $(0, \alpha^2)$ pour définir sa densité par rapport à $\mathbb{Q}^1$. Construire les mouvements browniens associés à $\mathbb{Q}^1$ et $\mathbb{Q}^2$ par le théorème de Girsanov. Montrer que l'on aurait pu définir $\mathbb{Q}^2$ en prenant directement (α^1, α^2) pour définir sa densité par rapport à $\mathbb{P}$.*

On aura enfin besoin du théorème de représentation.

Théorème 6.8 (de représentation) *Soit $\mathbb{Q}$ une mesure de probabilité définie comme dans le Théorème 6.6. Soit ξ une variable aléatoire telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi^2] < \infty$. Alors, il existe $\psi \in \mathcal{L}(W^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ tel que*

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi] + \int_0^T \psi_s dW_s^{\mathbb{Q}} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\xi] + \sum_{j=1}^m \int_0^T \psi_s^j dW_s^{\mathbb{Q},j} = \xi.$$

6.3 Application au modèle de Black et Scholes en dimension 2

Soit $W = (W^1, W^2)$ un mouvement brownien de dimension 2. On considère le modèle de Black et Scholes en dimension 2 dans lequel les cours des actifs S^1 et S^2 est donné par

$$\begin{aligned} S_t^1 &= S_0^1 e^{(\mu_1 - \frac{1}{2}|\sigma_1|^2)t + \sigma_1 W_t^1} \\ S_t^2 &= S_0^2 e^{(\mu_2 - \frac{1}{2}|\sigma_2|^2)t + \sigma_2(\rho W_t^1 + (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} W_t^2)} \end{aligned}$$

avec $(\mu_i, S_0^i, \sigma_i) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \times (0, \infty)$, $i = 1, 2$, et $0 \leq \rho < 1$. Le taux d'intérêt est une constante r. Le paramètre ρ sert à corréler les dynamiques de S^1 et S^2.

Excercice 6.9 *Calculer la loi jointe de $S_t := (S_t^1, S_t^2)$. En utilisant le lemme d'Itô, montrer que les dynamiques de S^1 et S^2 sont*

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1 \mu_1 dt + S_t^1 \sigma_1 dW_t^1 \\ dS_t^2 &= S_t^2 \mu_2 dt + S_t^2 \sigma_2 \rho dW_t^1 + S_t^2 \sigma_2 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} dW_t^2. \end{aligned}$$

On note

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \sigma_2 \rho & \sigma_2 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Excercice 6.10 *Calculer l'inverse* σ^{-1} *de* σ*.*

Afin de calculer la mesure risque neutre, on cherche $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ tel que

$$\mu - r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sigma\lambda. \tag{6.16}$$

Le vecteur λ est appelé vecteur de primes de risque.

Excercice 6.11 *Calculer* λ*. Appliquer ensuite le Théorème 6.6 avec* $\alpha = -\lambda$ *et montrer que*

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= S_t^1 r dt + S_t^1 \sigma_1 dW_t^{\mathbb{Q},1} \\ dS_t^2 &= S_t^2 r dt + S_t^2 \sigma_2 \rho dW_t^{\mathbb{Q},1} + S_t^2 \sigma_2 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} dW_t^{\mathbb{Q},2}. \end{aligned}$$

En déduire que le processus de prix actualisés $\tilde{S} := \beta S$ *est une martingale sous la mesure* $\mathbb{Q}$*.*

Dans ce modèle, une stratégie financière est processus $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ qui est S-intégrable, $\phi \in \mathcal{L}(S)$. Chaque ϕ_t^i est le nombre d'unités de l'action i détenues au temps t. A un tel processus, et étant donnée une richesse initiale x, on associe le processus de portefeuille $V^{x,\phi}$ défini par

$$\begin{aligned} V_t^{x,\phi} &= x + \int_0^t \phi_s dS_s + \int_0^t r(V_s^{x,\phi} - \phi_s S_s) ds \\ &= x + \int_0^t \phi_s^1 dS_s^1 + \int_0^t \phi_s^2 dS_s^2 + \int_0^t r(V_s^{x,\phi} - \phi_s^1 S_s^1 - \phi_s^2 S_s^2) ds. \end{aligned}$$

Comme dans le modèle en dimension 1, on ne peut répliquer parfaitement un payoff d'option G en T qu'en partant de l'espérance sous la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ de sa valeur actualisée.

Excercice 6.12 *Montrer que le processus de portefeuille actualisé* $\tilde{V}^{x,\phi} := \beta V^{x,\phi}$ *est une martingale sous la mesure* $\mathbb{Q}$*. En déduire que si* $V_T^{x,\phi} = G$ *alors* $x = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$*.*

Enfin, si $G = g(S_T) = g(S_T^1, S_T^2)$, avec g déterministe, on peut résoudre la version $2d$ de l'équation de la chaleur pour calculer le prix et la stratégie de couverture.

Excercice 6.13 *On suppose qu'il existe une fonction $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ telle que $v(T,x) = g(x)$ pour tout $x \in (0,\infty)^2$ et*

$$\begin{aligned} rv(t,x) &= v_t(t,x) + rx^1 v_{x^1}(t,x) + rx^2 v_{x^2}(t,x) \qquad (6.17) \\ &+ \frac{1}{2}\left((x^1\sigma_1)^2 v_{x^1x^1}(t,x) + (x^2\sigma_2)^2 v_{x^2x^2}(t,x) + 2\rho x^1\sigma_1 x^2\sigma_2 v_{x^1x^2}(t,x)\right) \end{aligned}$$

pour tout $(t,x) \in [0,T[\times(0,\infty)^2$. On suppose que $\phi := (v_{x^1}(t,S_t), v_{x^2}(t,S_t))_{t\le T} \in \mathcal{L}(S)$. Déduire du Lemme d'Itô la dynamique de $(\beta_t v(t,S_t))_{t\le T}$ et montrer que

$$v(0,S_0) + \int_0^T \phi_s d\tilde{S}_s = \beta_T g(S_T).$$

Excercice 6.14 (Erreur sur la correlation) *On suppose que la fonction v est calculée en utilisant l'équation* (6.17) *mais que la vraie dynamique de S correspond à ρ_0 au lieu de ρ. On construit le portefeuille de couverture à partir de v comme dans l'Exercice 6.13. Donner l'erreur de couverture sous une forme similaire à celle obtenue dans l'Exercice 3.18. Commenter.*

Excercice 6.15 *En argumentant comme dans la Section 5, montrer que toute option de payoff G tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[G^2] < \infty$ peut être parfaitement couverte en partant de $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$. Serait-ce encore possible si on avait $\sigma_2 = 0$?*

6.4 Application à un modèle à taux d'intérêt stochastique

Soit $W = (W^1, W^2)$ un mouvement brownien de dimension 2.
On considère un modèle à taux d'intérêt stochastique dans lequel le taux d'intérêt évolue selon la dynamique [16]

$$r_t = r_0 + \int_0^t a(b - r_s)ds + \int_0^t \gamma d\bar{W}_t$$

avec $a, b, \gamma > 0$ et $\bar{W} = \rho W^1 + (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} W^2$, $\rho \in [0,1[$. La dynamique du cours de l'action est

$$S_t = S_0 + \int_0^t S_s(r_s + \lambda\sigma)ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s^1,$$

avec $S_0, \sigma > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ qui s'interprète comme une prime de risque.

16. C'est le modèle de Vasiceck. Le processus ainsi défini est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Le taux sans risque étant stochastique, le facteur d'escompte s'écrit maintenant

$$\beta_t := e^{-\int_0^t r_s ds}.$$

On commence par calculer une mesure risque neutre $\mathbb{Q}$ associée à ce modèle. Le problème est qu'elle n'est pas unique...

Excercice 6.16 *Calculer la dynamique de $\tilde{S} := \beta S$, puis déterminer la densité de la mesure $\mathbb{Q}$ qui rend $\tilde{S}$ martingale et pour laquelle*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} r_t & = & r_0 + \int_0^t a(\bar{b} - r_s)ds + \int_0^t \gamma d\bar{W}_t^{\mathbb{Q}} \\ S_t & = & S_0 + \int_0^t S_s r_s ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s^{\mathbb{Q},1}, \end{array} \right. \tag{6.18}$$

où $\bar{b} := b - \lambda\gamma\rho/a$ et $\bar{W}^{\mathbb{Q}} := \rho W^{\mathbb{Q},1} + (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} W^{\mathbb{Q},2}$. Montrer qu'il n'existe pas qu'une mesure qui rend $\tilde{S}$ martingale, mais une infinité.

Le manque d'unicité de la mesure risque neutre révèle un problème plus fondamental, on ne peut pas se couvrir contre n'importe quel payoff en n'investissant que dans le titre S à cause du facteur de risque associé à W^2.

Excercice 6.17 *Soit $G = W_T^2/\beta_T$. Soit $Y_t = y + \int_0^t \psi_s dW_s^1$. Montrer que*

$$\mathbb{E}[|\beta_T G - Y_T|^2] = \mathbb{E}[|W_T^2 - y - \int_0^T \psi_s dW_s^1|^2] = y^2 + T + \mathbb{E}[\int_0^T |\psi_s|^2 ds].$$

Conclure que G ne peut être couvert en n'investissant que dans S (on dit que le marché est incomplet).

Il faut un véhicule de couverture supplémentaire. Ce rôle peut être joué par un 0-coupon. On suppose donc à partir de maintenant qu'il existe un marché liquide pour le 0-coupon de maturité $T' > T$, et que son prix B_t à la date t est donné par

$$B_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^{T'} r_s ds} | \mathcal{F}_t]$$

où $\mathbb{Q}$ est la mesure associée à la dynamique (6.18).
On commence par calculer B_t.

Excercice 6.18 1. *Appliquer le lemme d'Itô à $(e^{at} r_t)_{t \le T}$ et en déduire que, pour $t_1 \le t_2$,*

$$r_{t_2} = e^{-a(t_2 - t_1)} \left(r_{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} e^{as} \bar{b} ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{as} \gamma d\bar{W}_s^{\mathbb{Q}} \right).$$

2. *En utilisant la dynamique particulière de r, montrer que*

$$\int_t^{T'} r_s ds = \frac{1}{a}\left(r_t - r_{T'} + a\bar{b}(T'-t) + \gamma(\bar{W}^{\mathbb{Q}}_{T'} - \bar{W}^{\mathbb{Q}}_t)\right).$$

3. *Déduire de la Proposition 2.5 que $\int_t^{T'} r_s ds$ suit conditionnellement à $\mathcal{F}_t$ une loi de normale $\mathcal{N}(n(t)r_t + m(t), \vartheta(t))$ où $n(t), m(t)$ et $\vartheta(t)$ peuvent être calculés explicitement en fonction de $a, \bar{b}, \gamma$.*

4. *En déduire que*

$$B_t = e^{-n(t)r_t - m(t) + \frac{1}{2}\vartheta(t)}$$

5. *On peut vérifier que $\tilde{B} := \beta B$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$. En déduire que*

$$B_t = B_0 + \int_0^t r_s B_s ds - \int_0^t n(s) B_s \gamma d\bar{W}^{\mathbb{Q}}_s.$$

On remarque que $\min\{n(t),\ t \leq T\} > 0$, même si $n(T') = 0$, et que de ce fait le 0-coupon nous fournit bien l'instrument supplémentaire de couverture.

Excercice 6.19 *Soit G tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|\beta_T G|^2] < \infty$.*

1. *Montrer qu'il existe $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathcal{L}(W^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ tel que*

$$p_0 + \int_0^T \psi_s dW^{\mathbb{Q}}_s = \beta_T G$$

où

$$p_0 := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G].$$

2. *En déduire que l'on peut trouver $\phi = (\phi^1, \phi^2) \in \mathcal{L}((\tilde{S}, \tilde{B}), \mathbb{Q})$ tel que*

$$p_0 + \int_0^T \phi^1_s d\tilde{S}_s + \int_0^T \phi^2_s d\tilde{B}_s = \beta_T G.$$

3. *Quel est le portefeuille de couverture de l'option de payoff G ?*

Lorsque $G = g(S_T)$ pour une fonction payoff g déterministe, on peut calculer le prix en résolvant une équation aux dérivées partielles similaire à (3.9). Pour comprendre comment on obtient l'équation ci-dessous, on peut mener le même raisonnement que celui exposé après l'Exercice 3.17. La différence est qu'ici le prix de l'option doit être une fonction de S et de r : $v(t, S_t, r_t)$. On note $v_t, v_S, v_r, v_S, v_{rS}, v_{rr}$ ses dérivées premières et secondes en fonction des différentes variables (avec des notations évidentes).

Excercice 6.20 *On suppose que v est une fonction $C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ telle $v(T,\cdot)=g$ et*

$$rv \quad = \quad v_t + a(\bar{b}-r)v_r + rsv_S + \frac{1}{2}\left(s^2\sigma^2 v_{SS} + \gamma^2 v_{rr} + 2s\sigma\rho\gamma v_{Sr}\right)$$

sur $[0,T[\times(0,\infty)\times\mathbb{R}$.

1. *Montrer que*

$$\beta_T G = v(0,S_0,r_0) + \int_0^T v_S(s,S_s,r_s)d\tilde{S}_s + \int_0^T \beta_s v_r(s,S_s,r_s)\gamma d\bar{W}_s^{\mathbb{Q}}.$$

2. *En déduire comment construire une stratégie de couverture de $g(S_T)$ à partir de v_s et v_r, en partant d'un portefeuille de valeur $v(0,S_0,r_0)$ et en investissant dans S et B.*

Lorsque l'option est du type call ou put, on peut calculer explicitement le prix de l'option en utilisant une formule du type de celle démontrée dans l'Exercice 1.7. Pour ce faire, on utilise une technique dite de changement de numéraire.

Excercice 6.21 (Changement de numéraire/mesure forward neutre) *Soit g une fonction déterministe telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T|g(S_T)|]<\infty$. On note $p:=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T g(S_T)]$. Montrer les assertions suivantes :*

1. $B_t(T):=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T/\beta_t|\mathcal{F}_t]$ *s'interprète comme le prix d'un 0-coupon.*
2. $p=B_0(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H_T^{\mathrm{f}}g(S_T)]$ *où* $H_T^{\mathrm{f}}:=\beta_T/B_0(T)$.
3. H_T^{f} *est la densité d'une mesure de probabilité $\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}$ par rapport à $\mathbb{Q}$.*[17]
4. $p=B_0(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}}[g(S_T)]$.
5. $1=B_T(T)=B_0(T)e^{\int_0^T r_s ds}e^{-\frac{1}{2}\int_0^T\|\lambda_s\|^2ds-\int_0^T\lambda_s dW_s^{\mathbb{Q}}}$ *où λ est une fonction déterministe que l'on peut expliciter, c.f. Exercice 6.18 ci-dessus.*
6. $H_T^{\mathrm{f}}=e^{-\frac{1}{2}\int_0^T\|\lambda_s\|^2ds-\int_0^T\lambda_s dW_s^{\mathbb{Q}}}$.
7. *Le processus défini par*

$$W_t^{\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}} := W_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^t \lambda_s ds$$

   est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}$.
8. *On peut trouver une fonction déterministe $t\mapsto\mu_t^{\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}}$ (l'expliciter) telle que*

$$dS_t = S_t\mu_t^{\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}}dt + S_t\sigma dW_t^{\mathbb{Q}_T^{\mathrm{f}}}.$$

17. On l'appelle mesure forward neutre associée à la maturité T.

9. *Lorsque $g(S_T) = [S_T - K]^+$, $K > 0$, on peut exprimer (le faire)*

$$p = B_0(T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T^f}[g(S_T)]$$

en fonction des paramètres du modèle et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, c.f. Exercices 1.7 et 6.18.

La technique utilisée ci-dessus est appelée technique par changement de numéraire. En effet, au lieu d'écrire le prix p en euros comme l'espérance du payoff g exprimé en euros actualisés, on écrit

$$p/B_0(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T^f}[g(S_T)]$$

où $p/B_0(T)$ est le prix exprimé en unités de 0-coupon en 0 et le payoff $g(S_T) = g(S_T)/B_T(T)$ est exprimé en unités de 0-coupon en T. Tout se passe donc comme si, au lieu de travailler avec des euros actualisés, on travaillait en unité de 0-coupon. Le 0-coupon sert de nouveau numéraire.

7 Contrôle optimal stochastique

7.1 Un problème issu de la gestion de portefeuille

On se place dans un modèle de Black-Scholes comportant d actifs risqués : chaque actif S^i a pour dynamique

$$S_t^i = S_0^i e^{(\mu^i - \|\sigma^i\|^2/2)t + \sum_{j=1}^d \sigma^{ij} W_t^j}$$

où $\sigma^i := (\sigma^{i1}, \ldots, \sigma^{id})$ et W est un mouvement brownien de dimension d. On suppose que le taux sans risque est une constante r.
On note $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^d)$ une stratégie de portefeuille, i.e. ϕ_t^i est le nombre d'unités d'action i détenues en t. La valeur initiale du portefeuille est $x_0 > 0$.

Excercice 7.1 (Portefeuille positif sous forme exponentielle) *Donner la dynamique du processus de richesse $V^{x_0,\phi}$ partant de x et suivant la stratégie ϕ. En utilisant le lemme d'Itô, montrer que si ϕ est de la forme*

$$\phi^i = \alpha^i V^{x_0,\phi}/S^i$$

et $V_t^{x_0,\phi} > 0$ pour tout $t \le T$, pour un certain processus adapté α, alors

$$V^{x_0,\phi} = x_0 e^{\int_0^T \gamma_s ds + \int_0^T \alpha_s \sigma dW_s}$$

avec

$$\gamma_t = \sum_{i=1}^{d} \big(\alpha_t^i(\mu^i - r) + r\big) - \frac{1}{2}\langle \int_0^{\cdot} \alpha_s \sigma dW_s \rangle_t.$$

Que représente le processus α ?

On note σ la matrice dont chaque ligne i est σ^i,

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \cdots & \sigma^{1d} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma^{d1} & \cdots & \sigma^{dd} \end{pmatrix},$$

et on la suppose inversible.

Excercice 7.2 (Mesure risque neutre) *Donner l'expression de la densité H de la mesure risque neutre $\mathbb{Q}$, par rapport à $\mathbb{P}$.*

Le gestionnaire cherche à maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse terminale, pour une fonction d'utilité de type puissance $U(z) = \frac{1}{q+1} z^{q+1}$ avec $-1 < q < 0$. Il cherche donc à trouver la stratégie $\hat{\phi}$ telle que

$$\mathbb{E}[U(V_T^{x_0,\hat{\phi}})] = \max_{\phi \in \mathcal{L}(S)} \mathbb{E}[U(V_T^{x_0,\phi})] =: \hat{u}(0).$$

On parle de problème de contrôle stochastique optimale. La quantité $\hat{u}(0)$ est la valeur du problème. S'il existe un $\hat{\phi}$ réalisant le max, on l'appelle le contrôle optimal.

7.2 Approche par dualité

On commence par résoudre le problème en utilisant une technique dite de dualité. La première étape consiste à se ramener à un problème d'optimisation plus simple, sur un ensemble de variables aléatoires plutôt que sur l'ensemble des stratégies financières.

Excercice 7.3 (Résolution par dualité) *Montrer les assertions suivantes.*

1. *Etant donnée une variable aléatoire $G \geq 0$, il existe une stratégie ϕ telle que $V_T^{x_0,\phi} \geq G$ si et seulement si $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G] \leq x_0$. En déduire que*

$$\hat{u}(0) = \max\{\mathbb{E}[U(G)],\ G \text{ v.a.}, G \geq 0,\ \ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G] \leq x_0\}.$$

2. *Pour tout* $y > 0$

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &\leq \max_{G\geq 0, \text{ v.a.}} \mathbb{E}[U(G)] + y(x_0 - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]) \\ &= \max_{G\geq 0, \text{ v.a.}} \mathbb{E}[U(G) - yH\beta_T G] + yx_0 \\ &\leq \mathbb{E}[\max_{z\geq 0}(U(z) - yH\beta_T z)] + yx_0. \end{aligned} \tag{7.19}$$

3. *On a*

$$\max_{z\geq 0}(U(z) - y\beta_T H z) = U(I(y\beta_T H)) - I(y\beta_T H)y\beta_T H$$

où $I : z > 0 \mapsto I(z) := z^{\frac{1}{q}}$.

4. *Il existe* $\hat{y} > 0$ *tel que* $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T I(\hat{y}\beta_T H)] = \mathbb{E}[I(\hat{y}\beta_T H)\beta_T H] = x_0$.
5. *Il existe une stratégie* $\hat{\phi}$ *telle que* $V_T^{x_0,\hat{\phi}} = I(\hat{y}\beta_T H)$.
6. *On a*

$$\mathbb{E}[U(V_T^{x_0,\hat{\phi}})] \leq \hat{u}(0)$$

et

$$\hat{u}(0) \leq \mathbb{E}\left[U(I(\hat{y}\beta_T H)) - I(\hat{y}\beta_T H)\hat{y}\beta_T H\right] + \hat{y}x_0 = E\left[U(I(\hat{y}\beta_T H))\right]$$

ce qui implique que $\hat{\phi}$ *est la stratégie optimale.*

7. *Calculer* $\hat{u}(0)$*. Que deviendrait cette valeur si on réalisait l'optimisation en partant d'une autre date* $t \leq T$*, d'une valeur* s *de* S *et d'une valeur de portefeuille* x *en* t *(au lieu de* S_0 *et* x_0*) ? On appellera par la suite cette quantité* $\hat{u}(t, s, x)$*.*
8. *Il existe* $\alpha \in \mathcal{L}(W)$ *tel que*

$$\beta_T I(\hat{y}\beta_T H) = x_0 e^{-\frac{1}{2}\int_0^T \|\alpha_s\|^2 ds + \int_0^T \alpha_s dW_s^{\mathbb{Q}}}$$

où $W^{\mathbb{Q}}$ *est le mouvement brownien associé à* $\mathbb{Q}$ *par le théorème de Girsanov (donner la forme explicite de* α*).*

9. *La stratégie optimale est donnée par*

$$\hat{\phi}_t^i = V_t^{x_0,\hat{\phi}}\left[(\alpha_t^1, \ldots, \alpha_t^d)\sigma^{-1}\right]^i / S_t^i,\ t \leq T,\ i \leq d,$$

c.f. Exercice 7.1.

La minimisation sur $y > 0$ de la quantité à droite du signe $\leq$ dans (7.19) est appelé problème dual. Il est facile de montrer, étant donnés les résultats démontrés dans cette exercice, que $\hat{y}$ atteint le minimum de cette fonction. Autrement dit $\hat{y}$ résout le problème dual. La beauté de cet argument est que la résolution de ce problème dual donne la solution au problème de gestion optimal. Ce dernier est un problème de contrôle stochastique dans lequel on optimise sur l'ensemble des stratégies, alors que le problème dual consiste simplement à minimiser une fonction sur un paramètre réel. C'est évidemment beaucoup plus simple.
L'approche présentée ci-dessus est valable pour une large classe de fonctions d'utilité. Il suffit de suivre exactement la même argumentation.

Excercice 7.4 *Simuler à partir d'un générateur de nombres aléatoires la valeur terminale du portefeuille optimal et tracer un histogramme. Réaliser cet exercice en supposant tout d'abord que le portefeuille est ré-ajusté en temps continu (utiliser la forme de la richesse obtenue dans l'Exercice 7.1 ou la forme explicite de sa valeur en T), puis en supposant qu'il est ré-ajusté en temps discret à des dates de la forme iT/n, $i \leq n$, $n \geq 1$. Inclure enfin des coûts de transaction proportionnels au montant échangé.*

7.3 Approche par équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

On étudie maintenant une autre technique de résolution qui utilise une représentation par une équation aux dérivées partielles de notre fonction valeur $\hat{u}(t, s, x)$ introduite dans l'exercice précédent :

$$\hat{u}(t, s, x) = \max_{\phi \in \mathcal{L}(S)} \mathbb{E}[U(V_T^{x,\phi}) | (S_t, V_t^{x_0,\phi}) = (s, x)],$$

i.e. on débute l'optimisation à la date t avec les conditions de départ $(S_t, V_t^{x_0,\phi}) = (s, x)$. Pour simplifier les écritures, on se place dans un modèle en dimension $d = 1$ pour le reste de la section (faire l'extension en dimension d quelconque par la suite).

Excercice 7.5 (Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman) *On suppose qu'il existe une fonction $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}^2)$ telle que*

$$0 = \max_{a \in \mathbb{R}} \left(v_t + (as(\mu - r) + xr)v_x + \mu s v_s + \frac{s^2\sigma^2}{2}(v_{ss} + a^2 v_{xx} + 2a v_{sx}) \right) \tag{7.20}$$

sur $[0,T[\times(0,\infty)^2$*, et*

$$v(T,s,x) = U(x), \quad \textit{pour tout} \ \ (s,x)\in(0,\infty)^2. \tag{7.21}$$

Montrer les assertions suivantes.

1. *S'il existe une fonction déterministe* $t\mapsto f(t)$ *telle que*

$$v(t,s,x) = (x^{q+1}/(q+1))f(t)$$

alors $f(T)=1$ *et*

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{a\in\mathbb{R}}\left(f'\frac{x^{q+1}}{q+1} + f(as(\mu-r)+xr)x^q + f\frac{s^2\sigma^2}{2}a^2qx^{q-1}\right) \\ &= \max_{b\in\mathbb{R}}\left(f'\frac{x^{q+1}}{q+1} + f(b(\mu-r)+r)x^{q+1} + f\frac{\sigma^2}{2}b^2qx^{q+1}\right) \end{aligned}$$

sur $[0,T[\times(0,\infty)^2$*, où* f' *est la dérivée de* f*, et donc*

$$\begin{aligned} 0 &= \max_{b\in\mathbb{R}}\left(f'(t) + f(q+1)\left(b(\mu-r)+r+\frac{\sigma^2}{2}b^2q\right)\right) \\ &= f'(t) + f(q+1)\left(\hat{b}(\mu-r)+r+\frac{\sigma^2}{2}\hat{b}^2q\right) \end{aligned} \tag{7.22}$$

pour tout $t<T$ *avec*

$$\hat{b} := \frac{\mu-r}{|q|\sigma^2}.$$

2. *En prenant* $f(t) = e^{(q+1)\left(\hat{b}(\mu-r)+r+\frac{\sigma^2}{2}\hat{b}^2q\right)(T-t)}$*, alors* v *est bien solution de* (7.20)-(7.21).

3. *Si* $V_T^{x_0,\phi}\geq 0$ $\mathbb{P}-\text{p.s.}$ *alors* $V_t^{x_0,\phi}\geq 0$ $\mathbb{P}-\text{p.s.}$ *pour tout* $t\leq T$ *(utiliser le fait que le processus de portefeuille actualisé est une martingale sous* $\mathbb{Q}$*).*

4. *A partir de maintenant, on note*

$$L^a v(t,s,x) := v_t + (as(\mu-r)+xr)v_x + \mu s v_s + \frac{s^2\sigma^2}{2}(v_{ss} + a^2v_{xx} + 2av_{sx}).$$

En utilisant le lemme d'Itô et (7.20)-(7.21)*, montrer que, quelle que soit la stratégie* ϕ *telle que* $V_t^{x_0,\phi}\geq 0$ *pour tout* $t\leq T$*, on a*

$$\begin{aligned} v(0,S_0,x_0) &= \mathbb{E}\left[v(T,S_T,V_T^{x_0,\phi}) - \int_0^T L^{\phi_t}v(t,S_t,V_t^{x_0,\phi})dt\right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[U(V_T^{x_0,\phi})\right] \end{aligned}$$

(on admettra que toutes les intégrales par rapport au mouvement brownien sont d'espérance nulle).

5. *Montrer que si on définit $\hat{\phi}$ de sorte que*

$$\hat{\phi}_t = \hat{b} V_t^{x_0,\hat{\phi}} / S_t$$

alors

$$\begin{aligned} v(0, S_0, x_0) &= \mathbb{E}\left[v(T, S_T, V_T^{x_0,\hat{\phi}}) - \int_0^T L^{\hat{\phi}_t} v(t, S_t, V_t^{x_0,\hat{\phi}}) dt \right] \\ &= \mathbb{E}\left[U(V_T^{x_0,\phi}) \right]. \end{aligned}$$

6. *En déduire que $\hat{\phi}$ est la stratégie optimale.*

7. *Comparer aux résultats de l'Exercice 7.3.*

L'équation (7.20) est appelé équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. On peut reprendre la fin de l'exercice pour montrer que, si elle admet une solution régulière vérifiant la condition terminale (7.21), alors celle-ci coïncide nécessairement avec la fonction valeur $\hat{u}$ du problème et le contrôle optimale est donné par la fonction $(t, s, x) \mapsto \hat{a}(t, s, x)$ qui réalise le max dans cette équation, i.e. $\hat{\phi}_t = \hat{a}(t, S_t, V_t^{x_0,\hat{\phi}})$. C'est ce que l'on appelle un contrôle markovien, il ne dépend que de l'état du système $(S_t, V_t^{x_0,\hat{\phi}})$ à la date t, et pas du passé. Peu importe d'être capable de résoudre cette équation explicitement, même si cela à l'avantage de donner la forme explicite de $\hat{a}$. Lorsque l'on n'est pas en mesure de la résoudre à la main, on peut utiliser des algorithmes de résolution numériques.

D'une manière générale, cette équation provient du principe de programmation dynamique, bien connu en contrôle optimal stochastique.

Excercice 7.6 (Principe de la programmation dynamique) *On se place dans le contexte de l'Exercice 7.5. Montrer les assertions suivantes.*

1. *Quelle que soit la stratégie ϕ, telle que $V_t^{x_0,\phi} \geq 0$ pour tout $t \leq T$, on a*

$$\begin{aligned} v(t_1, s, x) &= \mathbb{E}\left[v(t_2, S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\phi}) - \textstyle\int_{t_1}^{t_2} L^{\phi_t} v(t, S_t, V_t^{x_0,\phi}) dt \mid (S_{t_1}, V_{t_1}^{x_0,\phi}) = (s, x) \right] \\ &\geq \mathbb{E}\left[v(t_2, S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\phi}) \mid (S_{t_1}, V_{t_1}^{x_0,\phi}) = (s, x) \right] \end{aligned}$$

pour tout $t_1 \leq t_2$, $s > 0$ et $x \geq 0$.

2. *Si $\hat{\phi}$ est la stratégie optimale telle qu'obtenue dans l'Exercice 7.5 alors*

$$\begin{aligned} v(t_1, s, x) &= \mathbb{E}\left[v(t_2, S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\hat{\phi}}) - \textstyle\int_{t_1}^{t_2} L^{\hat{\phi}_t} v(t, S_t, V_t^{x_0,\hat{\phi}}) dt \mid (S_{t_1}, V_{t_1}^{x_0,\hat{\phi}}) = (s, x) \right] \\ &= \mathbb{E}\left[v(t_2, S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\hat{\phi}}) \mid (S_{t_1}, V_{t_1}^{x_0,\hat{\phi}}) = (s, x) \right] \end{aligned}$$

pour tout $t_1 \leq t_2$, $s > 0$ et $x \geq 0$.

3. *On a*

$$v(t_1, s, x) \quad = \quad \max_{\phi \in \mathcal{L}(S)} \mathbb{E}\left[v(t_2, S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\phi}) \mid (S_{t_1}, V_{t_1}^{x_0,\phi}) = (s, x)\right] \quad (7.23)$$

pour tout $t_1 \leq t_2$*,* $s > 0$ *et* $x \geq 0$*.*

Le principe de programmation dynamique est l'équation (7.23). Il dit la chose suivante. Au lieu de réaliser l'optimisation directement sur $[t_1, T]$, on peut la couper en deux. Tout d'abord, on optimise sur $[t_2, T]$. Conditionnellement à la position $(S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\phi})$ atteinte en t_2, le gain espéré en t_2 après optimisation est $v(t_2, S_{t_2}, V_{t_2}^{x_0,\phi})$. Il suffit ensuite de maximiser l'espérance de ce gain étant donné la position en t_1 en optimisant sur $[t_1, t_2]$. On peut donc découper l'optimisation en deux. Ce principe est très général en contrôle optimal (il est par exemple à la base de tous les calculateurs d'itinéraires routiers).

Pour comprendre comment retrouver (7.20) à partir de (7.23), on applique formellement cette dernière entre $t_1 = t$ et $t_2 = t + dt$ où dt représente un accroissement infinitésimal. Alors, on optimise seulement sur la valeur ϕ_t de ϕ en t. Ceci donne d'après le lemme d'Itô

$$\begin{aligned} v(t, s, x) &= \max_{\phi_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[v(t + dt, S_{t+dt}, V_{t+dt}^{x_0,\phi}) \mid (S_t, V_t^{x_0,\phi}) = (s, x)\right] \\ &= \max_{\phi_t \in \mathbb{R}} \mathbb{E}\left[v(t, s, x) + L^{\phi_t} v(t, S_t, V_t^{x_0,\phi}) dt \mid (S_t, V_t^{x_0,\phi}) = (s, x)\right] \\ &= v(t, s, x) + \max_{\phi_t \in \mathbb{R}} L^{\phi_t} v(t, s, x) dt \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\max_{a \in \mathbb{R}} L^a v(t, s, x) = 0$$

qui est exactement (7.20).

8 Eléments de correction des exercices

Exercice 1.3

1. On suppose $t \geq s$. Alors, $\mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}[(W_t - W_s) W_s + W_s^2]$. Comme $W_t - W_s$ est indépendant de $W_s = W_s - W_0$, et d'espérance nulle, on obtient $\mathbb{E}[W_t W_s] = \mathbb{E}[W_s^2]$. Comme $W_s = W_s - W_0$ suit une loi normale de moyenne 0 et de variance s, on a $\mathbb{E}[W_s^2] = s$. Comme $t \geq s$, c'est le résultat recherché (évidemment on peut inverser les rôles de t et s).

2. On intervertit “espérance” et “intégrale” : $\mathbb{E}[\int_0^t |W_s|^2 ds] = \int_0^t \mathbb{E}[|W_s|^2]ds = \int_0^t s ds = t^2/2$.

3. $\mathbb{E}[e^X] = \mathbb{E}[e^{b+\sqrt{a}Y}]$ où $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ceci vaut
$$\int e^{b+\sqrt{a}y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int e^{b+\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sqrt{a})^2}{2}} dy = e^{b+\frac{a}{2}} \int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\sqrt{a})^2}{2}} dy,$$
et la dernière intégrale vaut 1 (densité d'une gaussienne intégrée $\mathcal{N}(\sqrt{a},1)$ sur $\mathbb{R}$).

4. D'après la définition de S,
$$\mathbb{E}[\int_0^t |S_s|^2 ds] = \int_0^t \mathbb{E}[|S_s|^2]ds = S_0^2 \int_0^t \mathbb{E}[e^{2(\mu-\frac{\sigma^2}{2})s+2\sigma W_s}]ds.$$
Comme $2\sigma W_s \sim \mathcal{N}(0, 4\sigma^2 s)$, on déduit de la question précédente que
$$\mathbb{E}[\int_0^t |S_s|^2 ds] = S_0^2 \int_0^t e^{2(\mu-\frac{\sigma^2}{2})s+2\sigma^2 s} ds.$$
Reste à calculer l'intégrale en utilisant que la primitive de $s \mapsto e^{cs}$ est $s \mapsto e^{cs}/c$. $\square$

Exercice 1.4 $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$ et suit une $\mathcal{N}(0, t-s)$. Donc, sa loi conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est $\mathcal{N}(0, t-s)$. La loi de $\ln(S_t) - \ln(S_s)$ est celle de $(\mu - \sigma^2/2)(t-s) + \sigma(W_t - W_s)$. Conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, c'est donc $\mathcal{N}((\mu - \sigma^2/2)(t-s), \sigma^2(t-s))$. $\square$

Exercice 1.5 On a $\mathbb{E}[S_t|\mathcal{F}_s] = S_s\mathbb{E}[S_t/S_s|\mathcal{F}_s] = S_s\mathbb{E}[e^{\ln(S_t)-\ln(S_s)}|\mathcal{F}_s]$. On conclut en utilisant les résultats des Exercices 1.3 et 1.4. $\square$

Exercice 2.1

1. $X_t = X_{t_n}$ si $t \geq t_n$ par constuction !

2. Si $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$, alors $X_t = X_s + \xi_i(W_t - W_s)$ par construction (prendre la différence par exemple). Par ailleurs, ξ_i et X_s sont connus en s, donc $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s + \xi_i\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = X_s$ (car $\mathbb{E}[W_t - W_s|\mathcal{F}_s] = 0$).

3. Si $t_i \leq s \leq t \leq t_{i+1}$, alors $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$, et donc $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t_i}] = X_{t_i}$ et $\mathbb{E}[X_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_s] = X_s$ en particulier. Si $t_j \leq s \leq t_{j+1} \leq t_i \leq t \leq t_{i+1}$ avec $j < i$, alors, $\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_{t_i}]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_{t_i}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t_i}|\mathcal{F}_{t_{i-1}}]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_{t_{i-1}}|\mathcal{F}_s] = \cdots = \mathbb{E}[X_{t_{j+1}}|\mathcal{F}_s] = X_s$.

4. Par construction, $X_t^2 = X_s^2 + \xi_i^2(W_t - W_s)^2 + 2X_s\xi_i(W_t - W_s)$. X_s et ξ_i sont connus en s, par ailleurs $(W_t - W_s) \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$. Il ne reste donc qu'à prendre l'espérance dans l'expression ci-dessus.
5. Supposons tout d'abord que $t = t_i$ pour un $i \leq n$. Alors, $\mathbb{E}[X_{t_i}^2] = X_0^2 + \sum_{j=1}^i \mathbb{E}[X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2]$. Ceci vaut $X_0^2 + \sum_{j=1}^i \mathbb{E}[\xi_{j-1}^2(t_j - t_{j-1})]$, d'après la question précédente, où $X_0 = 0$ par construction. On obtient donc $\mathbb{E}[X_{t_i}^2]$ $= \sum_{j=1}^i \mathbb{E}[\xi_{j-1}^2(t_j - t_{j-1})]$ qui est exactement $\mathbb{E}[\int_0^{t_i} \xi_s^2 ds]$. Pour considérer le cas $t_i < t < t_{i+1}$, il suffit d'écrire $X_t^2 = X_{t_i}^2 + X_t^2 - X_{t_i}^2$ et de suivre le même raisonnement.
6. La continuité de $t \mapsto X_t$ provient de celle de $t \mapsto W_t$
7. Lorsque ϕ est déterministe, X_t est simplement une somme de variables aléatoires suivant chacune une loi normale. C'est donc également une loi normale. Quand ϕ est déterministe, on déduit du fait que l'espérance des accroissements de W est nulle pour en déduire que X_t est d'espérance nulle. Sa variance est donc égale à $\mathbb{E}[X_t^2]$ que l'on a calculé dans la question précédente (pas besoin d'espérance si ϕ n'est pas aléatoire !). $\square$

Exercice 2.2. $\phi - \phi'$ est évidemment un processus simple si ϕ et ϕ' le sont. Alors, $\mathbb{E}[|\int_0^t(\phi_s - \phi_s')dW_s|^2] = \mathbb{E}[\int_0^t |\phi_s - \phi_s'|^2 ds]$ d'après l'Exercice 2.1. $\square$

Exercice 3.8 Soit X un processus d'Itô de la forme (3.5). Montrer les assertions suivantes :

1. Si $\gamma \equiv 0$, alors $X_t^2 = X_0^2 + 2X_0\int_0^t \alpha_s dW_s + (\int_0^t \alpha_s dW_s)^2$. Or, $\mathbb{E}[\int_0^t \alpha_s dW_s] = 0$ et $\mathbb{E}[(\int_0^t \alpha_s dW_s)^2] = \mathbb{E}[\int_0^t \alpha_s^2 ds]$. Reste à se rappeler que $\langle X\rangle_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds$ par définition.
2. $\langle X\rangle_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds = 0$ si $\alpha \equiv 0$.
3. $\langle X\rangle = \sigma^2\langle W\rangle$ si α est constant réelle σ est évident d'après la question précédente puisque $\langle W\rangle_t = t$.
4. Si X est une martingale alors $\gamma \equiv 0$, donc $X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s dW_s$. Donc, $\langle X\rangle_t = \int_0^t \alpha_s^2 ds$. Pour que $\int_0^t \alpha_s^2 ds = t$ pour tout t, il faut que $\alpha \equiv 1$, et alors $X = W$. $\square$

Exercice 3.11 Si X est un processus d'Itô qui est une martingale, alors $\gamma \equiv 0$. On a $X_t^2 = f(t, X_t)$ où f est définie par $f(s,x) = x^2$. En appliquant le Lemme d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned}(X_t)^2 &= X_0^2 + \int_0^t 0\, ds + \int_0^t 2X_s dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2d\langle X\rangle_s \\ &= \int_0^t 2X_s\alpha_s dW_s + \langle X\rangle_t.\end{aligned}$$

Donc, $(X_t)^2 - \langle X\rangle_t = \int_0^t 2X_s\alpha_s dW_s$ où $t \mapsto \int_0^t 2X_s\alpha_s dW_s$ est une martingale. □

Exercice 3.13

1. On a $f_t = \theta f$, $f_x = \sigma f$ et $f_{xx} = \sigma^2 f$ par propriété de la fonction exponentielle.
2. On applique le Lemme d'Itô à $t \mapsto f(t, W_t)$

$$\begin{aligned}df(t,W_t) &= f_t(t,W_t)dt + f_x(t,W_t)dW_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t,W_t)d\langle W\rangle_t \\ &= \theta f(t,W_t)dt + \sigma f(t,W_t)dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f(t,W_t)d\langle W\rangle_t.\end{aligned}$$

   Or, $S_t = f(t, W_t)$ et $\langle W\rangle_t = t$, donc

$$dS_t = \theta S_t dt + \sigma S_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t dt.$$

3. On applique le Lemme d'Itô

$$dv(t,S_t) = v_t(t,S_t)dt + v_x(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}v_{xx}(t,S_t)d\langle S\rangle_t.$$

   Or, $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$ d'après la question précédente, en particulier $d\langle S\rangle_t = \sigma^2 S_t^2 dt$. Donc

$$dv(t,S_t) = \left(v_t(t,S_t) + \mu S_t v_x(t,S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t,S_t)\right)dt + v_x(t,S_t)\sigma S_t dW_t.$$

4. On applique le résultat précédent à la fonction $v(t,x) := e^{-rt}x$. On a $v_t(t,x) = -rv(t,x)$, $v_x(t,x) = e^{-rt}$ et $v_{xx} = 0$. Ceci donne

$$dv(t,S_t) = \left(-rv(t,S_t) + \mu S_t e^{-rt}\right)dt + e^{-rt}\sigma S_t dW_t$$

   où encore

$$d(e^{-rt}S_t) = (\mu - r)\,(e^{-rt}S_t)dt + (e^{-rt}S_t)\sigma dW_t.$$

□

Exercice 3.15

1. Le fait que $\phi \in \mathcal{L}(\tilde{S})$ est ici simplement du au fait que r est borné.

2. On a $Y_t/\beta_t = f(t, Y_t)$ où $f(t, y) = e^{rt}y$. En applicant le Lemme d'Itô, on obtient

$$d(Y/\beta)_t = f_t(t, Y_t)dt + f_y(t, Y_t)dY_t + \frac{1}{2}f_{yy}(t, Y_t)d\langle Y\rangle_t$$

où $dY_t = \phi_t(\mu - r)\tilde{S}_t dt + \phi_t\sigma\tilde{S}_t dW_t$, cf Exercice 3.13, et $f_{yy} = 0$. En remplaçant, on obtient

$$\begin{aligned} d(Y/\beta)_t &= (r(Y/\beta)_t + \phi_t(\mu - r)S_t)\, dt + \phi_t\sigma S_t dW_t \\ &= \phi_t dS_t + ((Y/\beta)_t - \phi_t S_t)\, r dt, \end{aligned}$$

qui est la même dynamique que celle obtenue dans (3.7).

3. On écrit cette fois-ci $\tilde{V}_t^{x,\phi} = f(t, V_t^{x,\phi})$ avec $f(t, v) = e^{-rt}v$ et on applique le Lemme d'Itô et (3.7) pour obtenir

$$\begin{aligned} d\tilde{V}_t^{x,\phi} &= -re^{-rt}V_t^{x,\phi}dt + e^{-rt}dV_t^{x,\phi} + 0d\langle V^{x,\phi}\rangle_t \\ &= e^{-rt}\left[(V_t^{x,\phi} - \phi_t S_t)r - rV_t^{x,\phi}\right] dt + e^{-rt}\phi_t dS_t \\ &= \phi_t\left(-e^{-rt}rS_t dt + e^{-rt}dS_t\right). \end{aligned}$$

D'après l'Exercice 3.13, $-e^{-rt}rS_t dt + e^{-rt}dS_t = d\tilde{S}_t$ et donc $d\tilde{V}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t$. C'est la même dynamique que celle de Y.

4. Si $Y_0 = x$, alors Y et $\tilde{V}^{x,\phi}$ partent de la même valeur initiale et ont la même dynamique, ils sont donc égaux. □

Exercice 3.17 On applique le Lemme d'Itô à la fonction $t \mapsto f(t, S_t)$ où $f(t, x) = e^{-rt}v(t, x)$. On note $Z_t := f(t, S_t)$ pour alléger l'écriture. On a

$$dZ_t = f_t(t, S_t)dt + f_x(t, S_t)dS_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S_t)d\langle S\rangle_t$$

où $f_t(t, x) = -re^{-rt}v(t, x) + e^{-rt}v_t(t, x)$, $f_x(t, x) = e^{-rt}v_x(t, x)$, $f_{xx}(t, x) = e^{-rt}v_{xx}(t, x)$, $d\langle S\rangle_t = \sigma^2 S_t^2 dt$. Ceci donne

$$\begin{aligned} dZ_t &= e^{-rt}(v_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t))dt + e^{-rt}v_x(t, S_t)dS_t \\ &= e^{-rt}(v_t(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t))dt \\ &\quad + v_x(t, S_t)(-e^{-rt}rS_t dt + e^{-rt}dS_t). \end{aligned}$$

D'après l'Exercice 3.13, $-e^{-rt}rS_tdt + e^{-rt}dS_t = d\tilde{S}_t$, et par ailleurs $v_t(t, S_t) + rS_tv_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t) = 0$ puisque v vérifie l'équation aux dérivées partielles associée. Donc,

$$dZ_t = v_x(t, S_t)d\tilde{S}_t.$$

Par définition, $Z_T = Z_0 + \int_0^T dZ_t$ avec $Z_T = e^{-rT}v(T, S_T) = e^{-rT}g(S_T)$, puisque $v(T, \cdot) = g$, et $Z_0 = e^{-r0}v(0, S_0) = v(0, S_0)$. On a donc

$$e^{-rT}g(S_T) = v(0, S_0) + \int_0^T v_x(t, S_t)d\tilde{S}_t.$$

D'après l'Exercice 3.15, $e^{-rT}g(S_T)$ est la valeur en T d'un processus de portefeuille actualisé qui consiste à détenir un nombre de titres S égal à $v_x(t, S_t)$ à chaque date t, partant de $v(0, S_0)$ en 0. On peut donc couvrir parfaitement le payoff $g(S_T)$ à partir d'une richesse initiale $v(0, S_0)$ en 0. Le seul prix possible sur le marché en 0 pour cette option est donc $v(0, S_0)$. $\square$

Exercice 3.18 On note $Z_t := e^{-rt}v(t, S_t)$. D'après le même raisonnement que dans l'Exercice 3.17, on a

$$\begin{aligned}
dZ_t &= e^{-rt}(v_t(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma_0^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t))dt + e^{-rt}v_x(t, S_t)dS_t \\
&= e^{-rt}(v_t(t, S_t) + rS_tv_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma_0^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t))dt \\
&\quad + v_x(t, S_t)d\tilde{S}_t.
\end{aligned}$$

Attention : la vraie dynamique de S est donnée par σ_0 et non plus σ ! On réécrit la dynamique précédente en introduisant la mauvaise valeur du paramètre σ :

$$\begin{aligned}
dZ_t &= e^{-rt}(v_t(t, S_t) + rS_tv_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t))dt \\
&\quad + v_x(t, S_t)d\tilde{S}_t + \frac{1}{2}e^{-rt}(\sigma_0^2 - \sigma^2)S_t^2 v_{xx}(t, S_t)dt.
\end{aligned}$$

Comme v vérifie (3.9), ceci implique que

$$dZ_t = v_x(t, S_t)d\tilde{S}_t + \frac{1}{2}e^{-rt}(\sigma_0^2 - \sigma^2)S_t^2 v_{xx}(t, S_t)dt.$$

On rappelle que la dynamique de $\tilde{V}$ est donnée par

$$d\tilde{V}_t = v_x(t, S_t)d\tilde{S}_t$$

et que $Z_T = e^{-rT}g(S_T)$, $Z_0 = v(0, S_0) = \tilde{V}_0$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_T - e^{-rT}g(S_T) &= \tilde{V}_T - Z_T \\
&= \tilde{V}_0 - Z_0 + \int_0^T d(\tilde{V}_t - Z_t) \\
&= 0 + \int_0^T \frac{1}{2}e^{-rt}(\sigma^2 - \sigma_0^2)S_t^2 v_{xx}(t, S_t)dt.
\end{aligned}$$

On observe que les gains et pertes dépendent du fait que l'on ai sur-estimé ou sous-estimé la vraie volatilité σ_0, selon que v_{xx} est positif (fonction convexe) ou négatif (fonction concave). $\square$

Exercice 3.19 On note τ le premier temps t auquel $S_t = B$ ou $t = T$. On applique le Lemme d'Itô pour obtenir que $Z_t := e^{-rt}v(t, S_t)$ vérifie

$$\begin{aligned}
Z_\tau &= Z_0 + \int_0^\tau \left(v_t(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t) \right) dt \\
&\quad + \int_0^\tau v_x(t, S_t) d\tilde{S}_t \\
&= Z_0 + \int_0^\tau v_x(t, S_t) d\tilde{S}_t
\end{aligned}$$

puisque le premier terme en dt vaut 0 tant que $S_t < B$ et $t < T$, i.e. tant que $t < \tau$. On peut ré-écrire

$$e^{-rT}g(S_T)\mathbf{1}_{\{\tau \geq T, S_T < B\}} = Z_\tau = Z_0 + \int_0^T \mathbf{1}_{t<\tau} v_x(t, S_t) d\tilde{S}_t$$

où $\{t < \tau\} = \{S_t^* < B\}$ si $t < T$, et $\{\tau \geq T, S_T < B\} = \{S_T^* < B\}$. Pour couvrir l'option, il faut partir d'une richesse égale à $v(0, S_0)$ et détenir à chaque instant t un nombre de titre égal à $v_x(t, S_t)$ jusqu'au premier moment où $t = T$ ou $S_t = B$. $\square$

Exercice 3.20 Soit $\tau \leq \hat{\tau}$. On applique le Lemme d'Itô pour obtenir que $Z_t := e^{-rt}v(t, S_t)$ vérifie

$$\begin{aligned}
Z_\tau &= Z_0 + \int_0^\tau \left(v_t(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) - rv(t, S_t) \right) dt \\
&\quad + \int_0^\tau v_x(t, S_t) d\tilde{S}_t.
\end{aligned}$$

D'après l'équation satisfaite par v, on a $v_t(t,S_t)+rS_tv_x(t,S_t)+\frac{1}{2}\sigma^2S_t^2v_{xx}(t,S_t)-rv(t,S_t)=0$ tant que $t<\tau$. Donc,

$$Z_\tau \;=\; v(0,S_0)+\int_0^\tau v_x(t,S_t)d\tilde{S}_t.$$

Si $\tau\le\hat{\tau}$, on sait en outre que $Z_\tau=e^{-r\tau}v(\tau,S_\tau)\ge e^{-r\tau}g(S_\tau)$, avec égalité si $\tau=\hat{\tau}$. On couvre l'option en détenant $v_x(t,S_t)$ unités de S jusqu'en $\hat{\tau}$. Si on est exercé avant, on est couvert (sans faire de gain pour autant si l'exercice à lieu en $\hat{\tau}$.) Normalement, l'option devrait être exercée en $\hat{\tau}$. Si elle est exercée après, on peut en fait continuer à ce couvrir en suivant la même stratégie, mais ça dépasse le cadre de cet exercice. □

Exercice 4.3 On cherche $\bar{H}:=d\mathbb{P}/d\mathbb{Q}$. Ceci revient à chercher un variable aléatoire $\bar{H}$ telle que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\bar{H}X]$ pour toute variable aléatoire X (intégrable sous $\mathbb{P}$). Or, par définition de H et $\bar{H}$, $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\bar{H}X]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[H(X/H)]=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X/H]$. Par identification, on doit avoir $\bar{H}=1/H$ (si ce n'était pas le cas, la relation précédente ne serait pas vérifiée pour la variable aléatoire $X:=\mathbf{1}_{\{\bar{H}>1/H\}}-\mathbf{1}_{\{\bar{H}<1/H\}}$). On a $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\bar{H}]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[H\bar{H}]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[1]=1$. □

Exercice 4.7

1. Appliquer le résultat de l'Exercice 1.7 en remplaçant μ par r, T par $T-t$ et S_0 par S_t.
2. $\phi_t=v_x(t,S_t)$, calculer la dérivée de la fonction obtenue par rapport à la valeur de S_t. □

Exercice 4.9 En appliquant le Lemme d'Itô, on obtient

$$d\tilde{S}_t=\tilde{S}_t(\mu_t-r_t)ds+\tilde{S}_t\sigma_tdW_t$$

et on voudrait avoir

$$d\tilde{S}_t=\tilde{S}_t\sigma_tdW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Il faut donc que

$$W_t^{\mathbb{Q}}=W_t+\int_0^t(\mu_s-r_s)/\sigma_sds,$$

ce qui implique, d'après le Théorème de Girsanov, que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=e^{-\frac{1}{2}\int_0^T|\lambda_s|^2ds-\int_0^T\lambda_sdW_s}$$

avec $\lambda_s := (\mu_s - r_s)/\sigma_s$. $\square$

Exercice 4.10 On a

$$v(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[[xe^{(r-\sigma_0^2/2)(T-t)+\sigma_0(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})} - K]^+\right].$$

Cette fonction est convexe par rapport à x. D'après l'Exercice 3.18, il vaut mieux sur-estimer la volatilité. $\square$

Exercice 6.2 $\bar{W} := \rho W^1 + (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} W^2$ vaut 0 en $t=0$ et est un processus à trajectoire continues, puisque c'est le cas pour W^1 et W^2. On vérifie ensuite que ses accroissements sont gaussiens et indépendants en utilisant le fait que c'est le cas pour W^1 et W^2. Enfin $\mathbb{E}[\bar{W}_t - \bar{W}_s] = \rho\mathbb{E}[W_t^1 - W_s^1] + (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}[W_t^2 - W_s^2] = 0$ et, comme W^1 et W^2 sont indépendants, $\mathrm{Var}\left[\bar{W}_t - \bar{W}_s\right] = \rho^2\mathrm{Var}\left[W_t^1 - W_s^1\right]$ $+ (1-\rho^2)\mathrm{Var}\left[W_t^2 - W_s^2\right] = \rho^2(t-s) + (1-\rho^2)(t-s) = t-s$. $\square$

Exercice 6.3 Appliquer les définitions. $\square$

Exercice 6.7

1. On a $W^{\mathbb{Q},1} = W^1$ si et seulement si $\alpha^1 \equiv 0$.
2. Faire les deux constructions et constater que l'on obtient la même chose. $\square$

Exercice 6.10 Le determinant de σ est $\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}$ d'où

$$\sigma^{-1} := (\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\rho\sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Exercice 6.11 On a

$$\begin{aligned}\lambda &= \sigma^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} = (\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ -\rho\sigma_2 & \sigma_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} \\ &= (\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}})^{-1}\begin{pmatrix} (\mu_1 - r)\sigma_2(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \\ -(\mu_1 - r)\rho\sigma_2 + (\mu_2 - r)\sigma_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On obtient les nouveaux Browniens par la formule

$$\begin{pmatrix} W_t^{\mathbb{Q},1} \\ W_t^{\mathbb{Q},2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix} + \lambda t$$

ce qui implique que

$$\sigma \begin{pmatrix} W_t^{\mathbb{Q},1} \\ W_t^{\mathbb{Q},2} \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix} + \sigma\sigma^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} t$$

soit

$$\sigma \begin{pmatrix} W_t^{\mathbb{Q},1} \\ W_t^{\mathbb{Q},2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_1 - r \\ \mu_2 - r \end{pmatrix} t = \sigma \begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix}.$$

Ceci donne les dynamiques voulues en remplaçant. Pour obtenir que $\tilde{S}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$, il reste à appliquer le Lemme d'Itô pour écrire $d\tilde{S}^1$ et $d\tilde{S}^2$ en fonction de $W^{\mathbb{Q},1}$ et $W^{\mathbb{Q},2}$. □

Exercice 6.12 Appliquer le Lemme d'Itô pour obtenir

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t^{x,\phi} &= x + \int_0^t \phi_s^1 d\tilde{S}_s^1 + \int_0^t \phi_s^2 d\tilde{S}_s^2 \\ &= x + \int_0^t (\phi_s^1 \tilde{S}_s^1 \sigma_1 + \phi_s^2 \tilde{S}_s^2 \sigma_2 \rho) dW_s^{\mathbb{Q},1} + \int_0^t \phi_s^2 \tilde{S}_s^2 \sigma_2 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} dW_s^{\mathbb{Q},2}. \end{aligned}$$

Si $V_T^{x,\phi} = G$ alors $\tilde{V}_T^{x,\phi} = \beta_T G$ et $x = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$ car $\tilde{V}^{x,\phi}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$. □

Exercice 6.13 Procéder comme dans les exercice en dimension 1, en utilisant maintenant la formule d'Itô en dimension 2. □

Exercice 6.14 Procéder comme dans l'Exercice 3.18 pour obtenir

$$\tilde{V}_T^{x,\phi} - \beta_T g(S_T) = \int_0^T e^{-rs}(\rho - \rho_0) S_s^1 S_s^2 \sigma_1 \sigma_2 v_{x^1 x^2}(s, S_s) ds.$$

□

Exercice 6.15 D'après le Théorème 6.8, on peut trouver des processus adaptés ψ^1 et ψ^2 tels que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G] + \int_0^T \psi_s^1 dW_s^{\mathbb{Q},1} + \int_0^T \psi_s^2 dW_s^{\mathbb{Q},2} = \beta_T G.$$

D'après l'Exercice 6.12, il suffit de choisir ϕ^1 et ϕ^2 de sorte que

$$\begin{aligned} \psi_s^1 &= \phi_s^1 \tilde{S}_s^1 \sigma_1 + \phi_s^2 \tilde{S}_s^2 \sigma_2 \rho \\ \psi_s^2 &= \phi_s^2 \tilde{S}_s^2 \sigma_2 (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pour tout $s \leq T$, et de partir de $x = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\beta_T G]$ (on calcule facilement ϕ^2 par la deuxième équation, puis on injecte le résultat dans la première pour trouver ϕ^1). $\square$